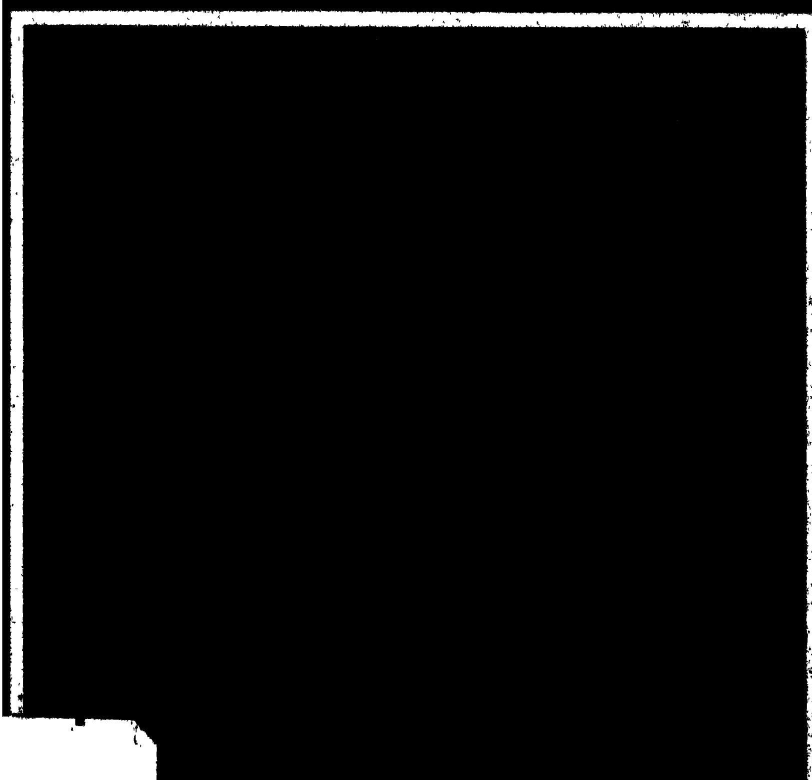
গণিত জগতের বিস্ময় রামানুজন



গণিত জগতের বিস্ময়

রামানুজন

সত্যবাচী সর

জ্ঞান বিচিত্রা প্রকাশনী
আগরতলা, ত্রিপুরা

GANIT JAGATER BISMAY RAMANUJAN

By

Satyabachi Sar

প্রথম প্রকাশ :

ফেব্রুয়ারি, 2000

প্রকাশক :

দেবানন্দ দাম

জ্ঞান বিচিত্রা প্রকাশনী

মুদ্রণ :

জ্ঞান বিচিত্রা প্রেস

যোগেন্দ্রনগর, আগরতলা, ত্রিপুরা

লেজার টাইপ সেটিং :

পার্থ রায়

কলকাতায় প্রাপ্তিস্থান :

ন্যাশনাল বুক এজেন্সি প্রাইভেট লিঃ

১২ বঙ্কিম চাটুজ্যে স্ট্রিট, কলকাতা - ৭০০ ০৭৩

দে বুক স্টোর

১৩/১ বঙ্কিম চাটুজ্যে স্ট্রিট, কলিকাতা ৭০০ ০৭৩

ISBN NO : 81-86792-63-5

মূল্য : **60 টাকা**

মা

ও

বাবার

পুণ্য স্মৃতির উদ্দেশে

সূচীপত্র

হার্ডির কাছে রামানুজনের কোনো ভালো ছবি না থাকায় 'Collected Papers by Srinivasa Ramanujan' -এ রামানুজনের ছবি দেবার হার্ডির ইচ্ছা অপূর্ণ থাকে। এ কথা তিনি নোবেলজয়ী এস চন্দ্রশেখরকে বলেছিলেন। 1937 সালে চন্দ্রশেখর ভারতে এসে জানকীদেবীর কাছে রাখা রামানুজনের পাসপোর্টের ছবি (1919 সালে ভারতে আসার আগে তোলা) থেকে নেগেটিভ তৈরি করিয়ে তা থেকে বড় আকারের ছবি প্রস্তুত করান। হার্ডিকে ছবি পাঠালে তা তাঁর পছন্দ হয় এবং তা 1940 সালে প্রকাশিত 'Ramanujan Twelve lectures on subject suggested by his life and work' বইতে সন্নিবেশিত হয়। উপরের ছবিটি তার প্রতিরূপ।

প্রাক্ - কথন

গণিত জগতের বিস্ময় শ্রীনিবাস রামানুজনকে বেশি করে জানার সুযোগ পেলাম 1987 সালে যখন আমরা ত্রিপুরা ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির পক্ষ থেকে রামানুজনের জন্ম-শতবর্ষ পালন উপলক্ষে রামানুজনের জীবন ও কর্মসাধনার উপর এক সেমিনারের আয়োজন করি। সেই সেমিনারে নানা বিশ্ববিদ্যালয় ও মহাবিদ্যালয় থেকে বিশিষ্ট অধ্যাপকরা যোগ দিয়ে রামানুজনের জীবনের উপর গুরুত্বপূর্ণ আলোচনা এবং তাঁর কাজের নানা বিষয় নিয়ে মূল্যবান প্রবন্ধ পাঠ করেন। আমরা অনুপ্রাণিত হই। রামানুজনকে শ্রদ্ধা জানানোর জন্য এবং জাতীয় জীবনে গণিতের গুরুত্বকে যথাযথভাবে উপলব্ধি করার জন্য ত্রিপুরা ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির পক্ষ থেকে রামানুজনের জন্মদিনকে 'গণিত-দিবস' হিসাবে ঘোষণা করার অনুরোধ ত্রিপুরা সরকারকে করা হয়। এ অনুরোধে সাড়া দিয়ে ত্রিপুরা সরকার এক অনন্য নজির সৃষ্টি করেন। সেই থেকে ত্রিপুরা রাজ্যের অনেক শিক্ষা-প্রতিষ্ঠানে গণিত-দিবস উদ্‌যাপিত হয়, যদিও ত্রিপুরা ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটি আগে থেকেই নানা অনুষ্ঠানের মাধ্যমে তা প্রতি বছর পালন করে আসছে।

এর পর হাতে এল রামানুজনের উপর লেখা রবার্ট ক্যানিগেলের অসাধারণ বই। বইটি পড়ে আরো উৎসাহিত হই। ভেতর থেকে এক তাগিদ অনুভব করলাম। মনে হল, রামানুজন ও তাঁর গণিত ভাবনা সম্বন্ধে সকলের বিশেষ করে ছাত্র-ছাত্রীদের অন্তত কিছু জানা দরকার। ভাবলাম, এর ফলে শুধু ভারতীয় গণিত ঐতিহ্য সম্বন্ধে আগ্রহ ও অনুরাগ বাড়বে না, সেই সঙ্গে গণিত তথা বিজ্ঞানের প্রতি সচেতনতা ও আকর্ষণ বাড়বে। এই প্রেক্ষাপটে 'রামানুজন ও গণিতভাবনা' শীর্ষক এক প্রবন্ধ লিখি যা 1996 সালের ফেব্রুয়ারি মাসে 'জ্ঞান - বিচিত্রা' নামক বিজ্ঞান পত্রিকায় প্রকাশিত হয়। প্রবন্ধটি পড়ে অনেকে রামানুজনের জীবন সম্বন্ধে আরো বিস্তৃত আলোচনা এবং তাঁর গণিত-ভাবনা সম্বন্ধে আরো তথ্য সরবরাহ করে বই লেখার অনুরোধ করেন। তাঁরা বলেন রামানুজনের বিস্তৃত জীবন ও গণিত ভাবনাকে একসঙ্গে নিয়ে লেখা বইয়ের অভাব তাঁরা ভীষণভাবে অনুভব করছেন। আমি উজ্জীবিত হই। আরো রামানুজনের লেখা এবং তাঁর উপর আরো নানা লেখা ও তথ্য সংগ্রহ করে পড়তে থাকি। রামানুজন সম্বন্ধে যতই জানতে থাকি ততই তাঁর প্রতি আকর্ষণ বাড়তে থাকে। তাঁর জীবন নাট্যের খণ্ড খণ্ড কাহিনী নিয়ে গড়ে ওঠা অখণ্ড এক রোমাঞ্চকর উপাখ্যান

এবং তাঁর প্রাথমিক কাজের মধ্যেও গণিতের অসাধারণ রত্নসম্ভার ও সৌন্দর্য আমাকে আবিষ্ট করে। আমার লেখা শুরু হয়। কিন্তু লিখতে গিয়ে রামানুজন ও তাঁর কাজকে আরো বেশি জানার আনন্দে ও সম্মোহনে থমকে যাই। দীর্ঘ সময় অতিবাহিত হতে থাকে লেখার কাজে। অবশেষে বই লেখার কাজ শেষ হল। তবে জানি না আরো কত পরিমার্জন ও পরিবর্ধন নিয়ে বইটি ছাপার অক্ষরে প্রকাশিত হবে।

বইটিতে দুটি ভাগ ছাড়া পরিশিষ্টও আছে। প্রথমভাগে রামানুজনের জীবন নিয়ে আটটি অধ্যায়, দ্বিতীয়ভাগে তাঁর গণিত ভাবনা নিয়ে পনেরটি শিরোনাম, পরিশিষ্টে কালক্রম অনুসারে রামানুজনের জীবনের নানা ঘটনাবলী নিয়ে 'একজনরে রামানুজন', কুলপঞ্জী ইত্যাদি সংযোজিত হয়েছে। বইটির 'গণিত ভাবনা' অনুধাবন করার জন্য উচ্চমাধ্যমিক বা স্নাতক স্তরের গণিতজ্ঞানই যথেষ্ট বলে আমার বিশ্বাস।

অকপটে স্বীকার করে নিই যে, এই বইটি লেখার সময় তথ্যসূত্রে উল্লেখিত উপাদানগুলির যথেচ্ছ ব্যবহার করেছি, বিশেষ করে রবার্ট ক্যানিগেলের 'The Man Who Knew Infinity', সুরেশ রামের 'Srinivasa Ramanujan,' কে শ্রীনিবাস রাও-এর 'Srinivasa Ramanujan : A Mathematical Genius', ব্রুস সি বার্ন্ট ও রবার্ট এ র‍্যানকিনের 'Ramanujan : Letters and Commentary' প্রভৃতি বইগুলি। এ বইগুলির লেখক ও প্রকাশকদের আমি কৃতজ্ঞতা ও শ্রদ্ধা জানাই। কিছু কিছু উপাদান সংগ্রহ করার ব্যাপারে যাঁরা আমাকে সাহায্য করেছেন তাঁদেরও ধন্যবাদ জানাই। এঁদের মধ্যে কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের বিশুদ্ধ গণিত বিভাগের ডঃ মিহির কুমার চক্রবর্তী, ত্রিপুরা বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিত বিভাগের ডঃ রবিনন্দ ভৌমিক এবং গণিত-ঐতিহাসিক ডঃ প্রদীপ কুমার মজুমদার— এই তিন বন্ধুর নাম বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। তাছাড়া যাঁর নাম অত্যন্ত শ্রদ্ধা ও সম্মানের সঙ্গে উল্লেখ করতে হবে, তিনি হলেন আমার শিক্ষক কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের বিশুদ্ধ গণিত বিভাগের অবসর প্রাপ্ত ইউ জি সি অধ্যাপক ডঃ নলিনীকান্ত চক্রবর্তী। তিনি তাঁর স্নেহ ও উপদেশ দিয়ে সাহায্য করা ছাড়া এই বইয়ের গণিত ভাবনার সম্পূর্ণ পাণ্ডুলিপি পড়ে পরিমার্জন ও সংযোজনের উপদেশ দিয়ে চিরকৃতজ্ঞ করেছেন।

শ্রীদিলীপ চৌধুরী বইটির পাণ্ডুলিপি পরিশুদ্ধির জন্য তাঁর মূল্যবান সময় ব্যয় করে অক্লান্ত পরিশ্রম করেছেন। তাঁকেও অসংখ্য ধন্যবাদ জানাই।

বিশেষ করে যার উৎসাহ ও তাগাদা না পেলে এই বই লেখা সম্পূর্ণ হত না, সে হল আমার বিশেষ স্নেহের শ্রীদেবানন্দ দাম, যে অল্প বয়েসেই বিজ্ঞান প্রচার ও

বিজ্ঞান-প্রকাশনার জগতে বিশিষ্ট হয়ে উঠেছে। সে আরো স্নেহ ও ধন্যবাদ পাবার অধিকারী।

তাছাড়া অক্ষর বিন্যাসে ব্যস্ত সবাইকে বিশেষ করে শ্রীপার্থ রায়কে আমার স্নেহমিশ্রিত ধন্যবাদ জানাই।

কৃতজ্ঞতা ও ধন্যবাদ জানানো প্রসঙ্গে যাঁর কথা না বললে গুরুতর অন্যায় হবে তিনি হলেন শ্রীমতী সর। বইটির দীর্ঘ প্রস্তুতি পর্বে ব্যস্ত থাকার সময় তিনি কেবল কষ্ট স্বীকার করেন নি, আমাকে উৎসাহিত করেছেন। যখন লেখার কাজ থমকে গেছে তখন লেখার গতিসঞ্চারে তিনি অনুপ্রাণিত করেছেন। শুধু তাই নয়, যখন ভাষা বা ভাবের অপ্রতুলতায় ভুগেছি বা লেখার উৎকর্ষ বৃদ্ধি বা পরিমার্জন বা পরিবর্ধনের জন্য পরামর্শ চেয়েছি, তখন তিনি সর্বতোভাবে সাহায্য করেছেন। তাঁকে ধন্যবাদ ও কৃতজ্ঞতা জানাই।

সবশেষে স্বীকার করে নিই যে, বইটির উৎকর্ষের দিকগুলির কৃতিত্বের অধিকারী হলেন উপরে উল্লিখিত ধন্যবাদপ্রাপকরা আর ত্রুটির দিকটির দায়িত্ব সম্পূর্ণ আমার। দ্বিধাহীন চিত্তে নিবেদন করি যে, যে কোনো রকম গঠনমূলক সমালোচনা ও পরামর্শ সাদরে গৃহীত হবে।

গণিত-বিভাগ
মহারাজ বীরবিক্রম কলেজ,
আগরতলা, ত্রিপুরা।
গণিত-দিবস, (22শে ডিসেম্বর), 1999

সত্যবাচী সর

শ্রদ্ধাঞ্জলি

রামানুজন ও তাঁর সৃষ্টি
শুধু আজ নয়, কাল নয়, আগামী দিনেও
জন্ম প্রজন্ম ঘুরে চিরায়ত স্মৃতির আলোকে
জ্ঞান ও প্রজ্ঞার গভীরতা মেশানো মোড়কে
খাঁটি বিশুদ্ধতা নিয়েও ফলিত বিজ্ঞানের ব্যাপ্তিতে
প্রতীত মনের প্রীতি মাখা অমূল্য সম্পদ এক।

শাশ্বত ভালোবাসার স্নিগ্ধ আবরণে
উপলব্ধিসিঞ্চিত শ্রদ্ধার প্রলেপনে
অপূর্ব অনুভূতির অরূপ আলোড়নে
সে সম্পদ শুধু উজ্জ্বলতর নয়,
মোহনীয় আলোর ছটায় আজ উদ্ভাসিতও।

অনন্য প্রতিভার ছোঁয়া দিয়ে
মূর্ত পার করে বিমূর্ত খুঁজে এনে
পুরানো ও নতুন গাছের সমাহারে
রামানুজন সৃষ্টি করলেন গণিতের অপরূপ বাগান।

সেই বাগানে আজ শুধু ফুল ফোটে না,
ফুলের স্নিগ্ধ সৌন্দর্য ও মিষ্টি গন্ধ
চুম্বকের মতো আকর্ষণ করে,
আবিষ্ট করে আত্মাকে,
চেতনাকে করে তোলে আবেগ তাড়িত অথচ যুক্তিনির্ভর।

শুধু ফুল নয়, বীজরাও জন্ম নেয় গাছে গাছে ;
সেই বীজ বড়ো হয়ে ছড়িয়ে পড়ে— দিক থেকে দিগন্তরে,
অঙ্কুরিত হয় বর্ণময় নানা গাছ।

সেই গাছেদের পাতায় পাতায়
হিন্দোলিত বাসাতে জন্ম নেয় কবিতা— নতুন কবিতা।
কবিতা গড়ে ওঠে নতুন-পুরানো নানা শব্দ নিয়ে ;
সেই সব কবিতা শুদ্ধ গণিতের কবিতা।
তারা যুক্তির কবিতা হয়েও গানে রূপান্তরিত হয়।

সেই সব গানের রূপ-রস-বর্ণ, সুর-ছন্দ-মূর্চ্ছনা
আজ হৃদয়ের গভীরে নাড়া দেয় ;
অনুভূতিকে কাছে টানে, আরো কাছে,
সম্মোহিত করে এক অনির্বচনীয় চেতনার দীপ্তিতে।

কুম্ভকোনমে সারঙ্গপাণি সান্নিধি স্ট্রিটে অবস্থিত রামানুজনের বাড়ি

রামানুজনের মা কোমলতাম্মল

রামানুজনের স্ত্রী জানকীদেবী
(রামানুজনের মৃত্যুর পরবর্তী সময়ে তোলা)

প্রথম ভাগ

জীবন

1976 সালে এন্ড্রুজের দ্বারা রামানুজনের 'হারানো নোটবই' আবিষ্কারের কিছুদিন পরে একটি খবরের প্রতি রিচার্ড আস্‌কের দৃষ্টি আকর্ষিত হয়। রামানুজনের আবক্ষমূর্তি তৈরির প্রতিশ্রুতি তখনো পর্যন্ত বাস্তবায়িত না হওয়ায় জানকীদেবী ক্ষোভ প্রকাশ করেছেন। আস্‌কে এ ব্যাপারে এগিয়ে আসেন; এন্ড্রুজ, চন্দ্রশেখর প্রভৃতি সাহায্য করেন। আমেরিকার ভাস্কর পল গ্রানলুন্ড (Paul Granlund) দ্বিমাত্রিক ছবি থেকে ত্রিমাত্রিক মূর্তি তৈরী করার চ্যালেঞ্জ গ্রহণ করে সফল হন। তিনি নিজের জন্য একটি 'টেস্ট কপি' ছাড়া দশটি আবক্ষমূর্তি তৈরী করেন। 1985 সালে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের এক অনুষ্ঠানে জানকীদেবীর হাতে একটি মূর্তি তুলে দেবার মাধ্যমে আস্‌কের প্রয়াস ফলপ্রসূ হয়। উপরের ছবিটি এ রকম একটি আবক্ষমূর্তির।

গণিতের বিস্ময়ের উৎসে

আমাদের চারপাশে বা ইতিহাসের পাতায় কখনো কখনো এমন কিছু বিরল ব্যক্তিত্বের সন্ধান পাওয়া যায় যে তাঁদের নিয়ে আলোচনা করার সময় একটি বিষয় বা দিক আমাদের চোখের সামনে বিশেষভাবে ভেসে ওঠে। এই বিষয় বা দিককে বাদ দিয়ে ব্যক্তির আলোচনা কেবল অর্থহীন নয়, অসম্ভব হয়ে পড়ে। এর সবচেয়ে ভালো উদাহরণ হিসাবে ব্যক্তি রামানুজন ও বিষয় গণিতের উল্লেখ করা যায়।

রামানুজনের ব্যক্তিগত সান্নিধ্য বা তাঁর গণিতভাবনার আভাস যাঁরা পেয়েছেন, তাঁদের প্রত্যেকে রামানুজনের অনন্যসাধারণ প্রতিভার দ্যুতি, অসাধারণ গণিতমানসিকতা, অদ্ভুত বিশ্লেষণী ক্ষমতা, চিন্তার স্বতঃস্ফূর্ত প্রকাশ ও বিস্ময়কর মেধার ব্যাপ্তিতে সম্মোহিত হয়েছেন, হারিয়ে গেছেন অভিভূতির গভীরে। এ প্রসঙ্গে রামানুজনের জীবনী 'The Man Who Knew Infinity' শীর্ষক অবিস্মরণীয় গ্রন্থের লেখক রবার্ট ক্যানিগেলের (Robert Kanigel) একটি স্বীকারোক্তি বিশেষভাবে উল্লেখের দাবি রাখে।

1987 সালে সারা বিশ্বে, বিশেষ করে ভারতবর্ষ, ইংল্যান্ড এবং আমেরিকায় যখন রামানুজনের জন্মশতবর্ষ বেশ সাড়ম্বরে পালিত হচ্ছে, তখন এক বিশিষ্ট প্রকাশনা সংস্থা থেকে আমেরিকার হপ্‌কিন্‌স বিশ্ববিদ্যালয়ের সাংবাদিকতার অধ্যাপক রবার্ট ক্যানিগেলের কাছে রামানুজনের উপর জীবনীগ্রন্থ লেখার প্রস্তাব আসে। তিনি কিন্তু তখনও জানতেন না—কে এই রামানুজন? ধীরে ধীরে তিনি রামানুজনের সম্বন্ধে জানার চেষ্টা করেন। রামানুজনের উপর লেখা নানা বই পড়েন, তাঁর গাণিতিক কাজকর্ম নাড়াচাড়া করেন, বিভিন্ন জায়গায় ঘুরে তিনি রামানুজন সম্বন্ধে নানা উপাদান জোগাড় করেন; রামানুজনের জন্মস্থান ও কর্মস্থান ঘুরে রামানুজনকে গভীরভাবে জানার চেষ্টা করেন। তিনি অকপটে স্বীকার করেন, 'And the more I learned, the more I too, came under Ramanujan's spell'। সত্যি যাঁরা রামানুজনের প্রতিভার বিচ্ছুরণের আভাকে কোনো না কোনো ভাবে অনুভব করতে পেরেছেন, তাঁদের সকলে, গণিতের সঙ্গে জড়িত হোন বা না হোন, রামানুজনের প্রতি এক অমোঘ আকর্ষণে আকৃষ্ট হয়েছেন এবং বিমোহিত হয়েছেন।

তাছাড়া, রামানুজনের সময়কার ভারতীয়দের মধ্যে তিনি এক বিশেষ প্রভাব বিস্তার করেছিলেন। জেমস আর নিউম্যান (James R. Newman) যথার্থ

বলেছেন, 'রামানুজনের জীবন এক নবযুগের সূচনা করেছে'। এ প্রসঙ্গে রামানুজনের জন্ম শতবর্ষ পালনের সময় আমেরিকার ইলিনাস (Illinois) বিশ্ববিদ্যালয়ে আয়োজিত অনুষ্ঠানে (1987 সালের 1-5 জুলাই) বিখ্যাত জ্যোতিঃপদার্থবিজ্ঞানী নোবেলজয়ী ডঃ চন্দ্রশেখরের বক্তৃতা উল্লেখের দাবি রাখে। তাঁর বক্তৃতায় তিনি বলেন যে, তখনকার দিনে তরুণদের কাছে রামানুজনের উদাহরণ এক দারুণ অনুপ্রেরণার কাজ করেছে। তারা জগৎটাকে এক ভিন্ন অ ুভূতিতে দেখতে শুরু করে, অনুপ্রাণিত হয়ে 'বুদ্ধিগত অবরোধের বাধা' (bonds of intellectual confinement) ভাঙতে তারা জোর কদমে এগিয়ে আসে। বক্তৃতার উপসংহারে তিনি বলেন, 'রামানুজনের নাম শোনার ছিষট্টি বছর কেটে যাবার পর আজো মনে হয় —ভারতবর্ষ এবং ভারতীয় বিজ্ঞান সমাজ তাঁদের সামনে রামানুজনের উদাহরণ পেয়ে অসাধারণ ভাগ্যবান। তাঁর সমকক্ষ হয়ে গড়ে ওঠার চেষ্টা বৃথা। এভারেস্টের মতো তিনি বিরাজমান।' দুঃখ ও বেদনার হলেও তাঁর জীবন সম্ভ্রম ও শ্রদ্ধা জাগানোর এক অপরূপ কাহিনী।

রামানুজন সম্বন্ধে বলতে গিয়ে পণ্ডিত জহরলাল নেহেরু তাঁর 'ভারতের খোঁজ' (Dicovery of India) নামক গ্রন্থে লিখেছিলেন, 'ভারতীয় গণিত অবশ্যই প্রত্যেককে সাম্প্রতিক সময়ের এক অসাধারণ ব্যক্তিত্বের সম্বন্ধে ভাবাবে। তিনি হলেন শ্রীনিবাস রামানুজন।.....................আমার ধারণা, অধ্যাপক জুলিয়ান হাক্সলে এক জায়গায় তাঁকে এই শতকের সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ হিসাবে অভিহিত করেছেন।'

রামানুজন ছিলেন গণিতের ধ্যান-গম্ভীর ভাবনার একান্ত শরিক এবং একনিষ্ঠ সাধক— এক ও অদ্বিতীয়। গণিতই ছিল তাঁর কাছে পরম প্রাপ্তি, সাধনার ধন এবং জীবনের চরম সত্য। তীব্র অর্থকষ্ট, সামাজিক প্রতিবন্ধকতা, বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রথাগত ডিগ্রি সংগ্রহে ব্যর্থতা বা শারীরিক অসুস্থতা কোনো কিছুই তাঁকে গণিত-আরাধনার কাছ থেকে দূরে সরিয়ে রাখতে পারে নি। অসুস্থ শরীরে মৃত্যুর চারদিন আগেও তিনি গণিতে নূতন সংযোজনের কাজে ব্যস্ত। গণিতশাস্ত্রে তাঁর অবদান বিশ্বাবাসীর কাছে শুধুমাত্র তাঁকে উচ্চ আসনে প্রতিষ্ঠিত করেনি, জগৎসভায় ভারতীয় হিসাবে তিনি আমাদের গর্বিত করেছেন। তাঁর গণিত প্রতিভার স্বীকৃতিতে এইচ ডব্লু টার্নবুল (H.W.Turnbull) যথার্থ বলেছেন, 'Judged by absolute standard of greatness among all mathematicians of the East, the genius of Ramanujan appears to be supreme.'

গণিতের বিস্ময়ের উৎসে

অসাধারণ স্মৃতিশক্তি, অকল্পনীয় অনুমান ক্ষমতা, তড়িৎগতির গণনাকুশলতা ছাড়াও ধৈর্য, তিতিক্ষা, শ্রমের প্রতি ভালোবাসা প্রভৃতি গুণের দ্বারা রামানুজন যে পর্যায়ে উন্নীত হয়েছিলেন বা যে ধরনের প্রতিভার স্বাক্ষর রেখে গেছেন, তাকে বর্ণনা করার জন্য কেবলমাত্র 'বিস্ময়কর', 'অলৌকিক', 'অলোকসামান্য' শব্দগুলিই যথেষ্ট নয়। তাই তো তাঁকে সর্বকালের সর্বদেশের সেরা গণিতজ্ঞ লিওনার্ড অয়লার (Leonhard Euler, 1707-1783), কার্ল ফ্রেডরিক গাউস (Karl Friedrich Gauss, 1777-1855), কার্ল গুস্তাভ জেকব জ্যাকোবি -এর (Karl Gustav Jacob Jacobi. 1804–1851) সঙ্গে তুলনা করা হয়। তবে লক্ষণীয়, এঁদের প্রত্যেকে রামানুজনের তুলনায় অনেক বেশি কাল ধরে জীবিত ছিলেন। স্বল্পায়ু হওয়া সত্ত্বেও গণিতে তাঁর যথেষ্ট পরিমাণ মৌলিক ও সৃজনধর্মী কাজ প্রাচ্য ও পাশ্চাত্য উভয়কে মুগ্ধ করেছে। এখনও তাঁর গাণিতিক কাজের রহস্যের মূল অনুসন্ধানের কাজে গণিতজ্ঞরা তীব্রভাবে আকর্ষিত হন। এ প্রসঙ্গে ব্রুস বার্নটের (Bruce Berndt) মন্তব্য শোনা যাক, 'The enigma of Ramanujan's creative process is still covered by a curtain that has barely been drawn'। তাঁর মৃত্যুর সাত দশকের বেশি সময় পেরিয়ে যাবার পরও তাঁর প্রতিভা, স্বজ্ঞা, সাধনা ও সাফল্য আজও আমাদের বিস্মিত করে, উদ্বেলিত করে ও পরাভূত করে; এবং আমার বিশ্বাস, আগামী দিনেও সমানভাবে সবাইকে বিহ্বল করবে।

শুধুমাত্র রামনুজনের গবেষণালব্ধ গণিতকর্মই নয়, তাঁর জীবনের নানা ঘটনা ও কাহিনী এখনও যেন যবনিকার অন্তরালে ঢাকা আছে। সে সব না-বলা কথা, না-জানা রসদ, ধাঁধায় মোড়া রহস্য যেন উন্মোচিত হবার জন্য প্রতীক্ষারত। তাঁর জীবনকাহিনীর রোমাঞ্চ প্রতিটি পাঠককে তীব্রভাবে আকৃষ্ট করে, বেঁধে ফেলে এক অপ্রতিরোধ্য টানে। সত্যিই আমরা জেমস নিউম্যানের সঙ্গে একমত হই, 'One may doubt that so prodigious a feat had ever been accomplished in the history of thought'। অথচ প্রতিভার সম্যক ও পরিপূর্ণ বিকাশের জন্য তিনি পরিণত জীবনকাল পান নি; পান নি যথাযথ ও পর্যাপ্ত শিক্ষা এবং শিক্ষার পরিবেশ। তবুও গণিতের চিন্তার জগতে তিনি যে অনায়াস বিচরণ করেছেন এবং মূল্যবান সংযোজনের স্বর্ণস্বাক্ষর রেখে গেছেন, তা সবাইকে এক আশ্চর্য জাদুর আবেশে আটকে রাখে। সত্যিই রামানুজন গণিত জগতের অপূর্ব প্রাপ্তি এবং পরম বিস্ময়।

ছেলেবেলা ও বিদ্যালয়ে

আগের মাদ্রাজ নামে পরিচিত রাজ্যকে বর্তমানে তামিলনাডু নামে সবাই জানে। এই রাজ্যের তাঞ্জোর জেলার প্রাচীন শহর কুম্ভকোনম এখন বেশ বড়ো শহর। তবে শহর হিসাবে যখন ছোটো ছিল, তখনও এর খ্যাতি কম ছিল না। প্রায় দেড়শো বছরের পুরোনো 'সরকারি আর্ট কলেজ' হিসাবে পরিচিত কলেজের জন্য শহরটি বিখ্যাত হয়েছিল। তখন কলেজটিকে দক্ষিণ ভারতের কেমব্রিজ হিসাবে ডাকা হত। দক্ষিণের গঙ্গা নামে পরিচিত কাবেরী নদীর তীরে প্রায় 11^{0} অক্ষাংশে অবস্থিত এই শহর। বর্তমানের চেন্নাই শহরের (আগে মাদ্রাজ নামে পরিচিত) প্রায় 310 কিলোমিটার দক্ষিণে এই শহরের অবস্থান। সড়কপথে অথবা রেলের মাধ্যমে চেন্নাইর সঙ্গে এর যাতায়াতের সুবন্দোবস্ত আছে।

উল্লেখ করা যেতে পারে, এই শহর ও তার চার পাশে দশ-বারোটি বড়ো মন্দির আছে। এ সব মন্দিরে কোথাও বিষ্ণুর আরাধনা আবার কোথাও শিবের আরাধনা হয়। প্রচুর পুণ্যার্থীরা প্রতি বারো বছর অন্তর এ শহরে 'মহাম্মাখম উৎসব' উপলক্ষে সমবেত হন। প্রচলিত ধারণা—মহাপ্রলয়ের পরবর্তী পর্বের সৃষ্টিকে স্মরণ করার জন্য এই উৎসবের আয়োজন করা হয়। কথিত আছে, পবিত্র কুম্ভের জলে প্রবাহিত ছিল সৃষ্টির বীজরূপী অমৃত। মহাদেবের ত্রিশূলের সাহায্যে একে ছিদ্র করে ও অমৃতকে মুক্ত করে তাকে মহাম্মাখম জলাধারে সংগৃহীত করা হয়। মহাম্মাখম হল প্রতিটি মন্দির সংলগ্ন পবিত্র স্নানের স্থান। 1897 সালে এমন এক উৎসবে প্রায় সাড়ে সাত লক্ষ পুণ্যার্থী এখানে জড়ো হয়েছিলেন। এই 'কুম্ভ' থেকেই নাকি কুম্ভকোনম নামের উৎপত্তি।

এই কুম্ভকোনমের এক উচ্চশ্রেণীর নিষ্ঠাবান ব্রাহ্মণ দম্পতি কুপ্পুস্বামী শ্রীনিবাস আয়েঙ্গার ও কোমলতাম্মলের জ্যেষ্ঠ সন্তান হলেন রামানুজন। উল্লেখ করা যেতে পারে, নামের 'কুপ্পুস্বামী' অংশটি যেমন রামানুজনের বাবা তাঁর বাবার কাছ থেকে পেয়েছিলেন, সেই একই রীতি অনুসারে রামানুজনও উত্তরাধিকার সূত্রে 'শ্রীনিবাস' অংশটি তাঁর বাবার নাম থেকে পান। পুরো নাম শ্রীনিবাস রামানুজন আয়েঙ্গার হলেও তিনি 'রামানুজন' হিসাবে সমধিক পরিচিত। তাঁর মা তাঁকে আদর করে 'চিন্নাস্বামী' ('ছোটো রাজা' বা 'little lord') হিসাবে ডাকতেন। তাঁদের পূর্বপুরুষের ভিটে ছিল শ্রীসারঙ্গপাণি সান্নিধি স্ট্রিটে অবস্থিত যা এখন দেশ-বিদেশের গণিত

অনুরাগীদের কাছে এক তীর্থভূমি হিসাবে বিবেচিত।

রামানুজনের জীবন ঘিরে নানা কাহিনী ও উপকাহিনীর মধ্যে তাঁর জন্ম নিয়ে কাহিনীও কম আকর্ষণীয় নয়। বিয়ের কয়েক বছর পরও কোনো সন্তান না হওয়ায় কোমলতার মন ভালো থাকে না। মেয়ের এই বিষণ্ন অবস্থায় বিচলিত হয়ে ইরোডের মুন্সেফ কোর্টের আমিন নারায়ণ আয়েঙ্গার মেয়ের সন্তান কামনায় স্থানীয় পুরোহিতদের শরণাপন্ন হন। তাঁদের পরামর্শে পাশের শহর নামাক্কলের জাগ্রতা দেবী নামগিরিকে সন্তুষ্ট করতে বিশেষ পূজার আয়োজন করা হয়। কথিত আছে কোমলতাম্মলের মা রঙ্গম্মলকে নাকি দেবী স্বপ্নে বলেছিলেন কোমলতার সন্তান আসছে এবং তাঁর মাধ্যমেই দেবী একদিন রঙ্গম্মলের সঙ্গে কথা বলবেন। এর কিছুকাল পরই কোমলতা সন্তানসম্ভবা হন। ফলে দেবী নামগিরির প্রতি তাঁদের ভক্তি ও নির্ভরতা আরো বেড়ে যায়।

প্রথম সন্তানের জন্ম দিতে প্রচলিত রীতি অনুসারে কোমলতা তাঁর বাবা-মার কাছে চলে আসেন 1887 সালের সেপ্টেম্বর মাসে—ইরোডের তেপ্পুকুলম স্ট্রিটে অবস্থিত তাঁদের বাড়িতে। ইরোড হল কাবেরী ও তার শাখা নদী ভবানীর সঙ্গমস্থলে অবস্থিত এক বর্ধিষ্ণু শহর—চেন্নাই থেকে প্রায় 400 কিলোমিটার দক্ষিণ-পশ্চিমে অবস্থিত। এখানেই 1887 সালের 22শে ডিসেম্বর ঠিক সূর্যাস্তের পর রামানুজনের জন্ম হয়। দিনটি ছিল মার্গশীর্ষ মাসের নবম দিন বৃহস্পতিবার। লক্ষণীয় যে, তাঁর নামাকরণ বৈষ্ণব ঋষি রামানুজনের নামানুসারেই করা হয়। প্রায় 1100 সালে ইনি তাঁর তত্ত্বের সাহায্যে হিন্দুধর্মে নূতন জোয়ার আনার প্রয়াস করেছিলেন। মজা হল এঁর জন্মও হয়েছিল বৃহস্পতিবার এবং জ্যোতিষশাস্ত্র অনুসারে দুজনেরই জন্মপত্রে মিল পরিলক্ষিত হয়। প্রথা মতো জন্মের একাদশ দিনে তাঁর আনুষ্ঠানিক নামকরণ করা হয়। জন্মের প্রায় এক বছর পর তিনি মা'র সঙ্গে কুম্ভকোনমে প্রথম আসেন।

রামানুজনের জন্মের সময় তাঁর বাবার বয়স ছিল চব্বিশ আর মা'র বয়স ছিল কুড়ির কাছাকাছি। রামানুজনের বাবা ছিলেন এক কাপড়ের দোকানের কর্মচারী। তাঁর কাজ ছিল খদ্দেরদের কাছ থেকে অর্ডার নেওয়া, হিসেব লিখে রাখা আর কাছাকাছি গ্রাম থেকে বাকি আদায় করা। মাইনে ছিল মাসে কুড়ি টাকা। সাধারণত সকাল আটটায় বাড়ি থেকে বেরোতে হত। ফিরতে ফিরতে বিকেল গড়িয়ে সন্ধেও হত মাঝে মাঝে। হয়তো কোনো কোনো দিন দুপুরের খাবারের জন্য বাড়িতে আসতেন। তবে বেশির ভাগ সময় দুপুরের জন্য বাড়ি থেকে খাবার নিয়ে যেতেন।

এমনি ভাবে দেখতে গেলে কুপ্পুস্বামীর জীবনের বেশির ভাগ সময় বাড়ি থেকে দূরেই কেটেছে। ফলে রামানুজন পিতার সাহচর্য তেমন ভাবে পান নি। মা'র সান্নিধ্য ও অভিভাবকত্বেই তিনি বড়ো হয়ে উঠেছেন।

মা কোমলতা ছিলেন ভক্তিমতী ও সুকণ্ঠের অধিকারিণী। কাছের সারঙ্গপাণি মন্দিরে তিনি দলে বসে ভজন বা ভক্তিগীতি গাইতেন। দলের এই গান গাওয়ার জন্য কিছু অর্থের উপার্জন হত। এর অর্ধেক মন্দিরের তহবিলে জমা হত। বাকিটা থেকে যাঁরা গাইতেন তাঁরা ভাগ করে নিতেন। এভাবে তিনি মাসে পাঁচ টাকা বা দশ টাকা যা পেতেন, তা সংসারের কাজে লাগত। সাধারণত মন্দিরের কোনো অনুষ্ঠানে তিনি অনুপস্থিত থাকতেন না। কিন্তু একবার তাঁকে বেশ কিছুদিন অনুপস্থিত থাকতে হয়েছিল, যখন রামানুজন বসন্ত রোগে আক্রান্ত হয়েছিলেন।

ছেলেবেলায় তিনি মহামারী ও মৃত্যুর সঙ্গে সংগ্রাম করে বেঁচেছিলেন। যখন রামানুজনের বয়স দু'বছর, তখন তিনি বসন্তে আক্রান্ত হন। সেই সময় এই রোগে তাঞ্জোর জেলায় প্রায় চার হাজার লোক প্রাণ হারায়। রামানুজন বেঁচে গেলেও তাঁর মুখমণ্ডল সারাজীবন বসন্তের দাগ বহন করেছে। তাছাড়া যখন তাঁর বয়স দশ বছর, তখন কলেরার মহামারীতে প্রায় দশ হাজার লোক মারা যায়। এমন কী, রামানুজন বাল্যমৃত্যুর গ্রাস থেকেও রক্ষা পেয়েছিলেন, যার হাত থেকে তাঁর পরের তিনজন (ভাই সদ্‌গোপান, বোন অম্বুজাবল্লী, ভাই সেশন) রক্ষা পান নি; এক বছর বয়স হবার আগেই সবাই মৃত্যুমুখে পতিত হয়েছেন। তবে রামানুজনের চেয়ে এগারো বছরের ছোটো ভাই লক্ষ্মী নরসিংহ এবং সতেরো বছরের ছোটো থিরুনারায়ণ যথাক্রমে আটচল্লিশ বছর এবং তিয়াত্তর বছর বেঁচেছিলেন।

এগারো বছর বয়স হওয়া পর্যন্ত বাবা-মা'র একমাত্র বেঁচে থাকা সন্তান হবার ফলে রামানুজন স্বাভাবিকভাবে আলাদা আদর, যত্ন এবং নজর পেয়েছিলেন। সেই সঙ্গে একা একা বড়ো হয়ে ওঠার ফলে তাঁর চারপাশে একটা নিরালা ও একাকিত্বের পরিবেশ গড়ে ওঠে। নিমগ্নতার শিক্ষণও যেন অতি অল্প বয়সেই তাঁর মধ্যে সঞ্চারিত হয়।

ছোটোবেলার নানা ঘটনার মধ্যে একটি হল সাধারণ শিশুদের তুলনায় তাঁর দেরিতে কথা বলতে শেখা। তিন বছর পেরিয়ে যাবার পরও কথা বলতে না পারায় মা কোমলতা ছেলেকে নিয়ে বাবা-মা'র কাছ থেকে চলে আসেন। তখন নারায়ণ আয়েঙ্গার কাঞ্চীপুরমে থাকতেন। সেখানে রামানুজনের 'অক্ষরাভ্যাস'

অনুষ্ঠানের আয়োজন করা হয়। অনুষ্ঠানে মাতামহ এক একটি অক্ষর জোরে জোরে উচ্চারণ করে রামানুজনের হাত ধরে সেই অক্ষর মেঝের উপর ছড়ানো বালির উপর লেখাতে থাকেন। এই অনুষ্ঠানের কিছুদিন পরই রামানুজন কথা বলা শুরু করেন এবং তামিল বর্ণমালার অক্ষরগুলি (12টি স্বরবর্ণ, 18টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 216টি সংযুক্ত বর্ণ) শিখে ফেলেন।

1892 সালের পয়লা অক্টোবর রামানুজনের বিদ্যালয় জীবন শুরু। তাঁকে একটি 'পিয়াল' স্কুলে পাঠানো হয়। পিয়াল স্কুল হল ধারা বহির্ভূত এক রকমের পাঠশালা, সেখানে দশ-বারো জন ছাত্রকে নিয়ে একজন শিক্ষক পড়িয়ে থাকেন। তামিল ভাষায় এই সব স্কুলের নাম 'থিন্নাইপল্লী কুড়ম'। কিন্তু স্কুল রামানুজনের ভালো লাগে না। তাই তাঁকে অন্য দু'একটি স্কুলে ভর্তি করা হয়। পরে তাঁকে কুম্ভকোনমে নিয়ে এসে 1894 সালে কঙ্গায়ন প্রাথমিক বিদ্যালয়ে ভর্তি করা হয়। এখানে তিনি ইংরাজিও শিখতে থাকেন। স্কুলে তিনি খুব শান্তশিষ্ট ও মুখচোরা ছিলেন। সহপাঠীরা তাঁর পিছনে লাগলেও তিনি অদ্ভুত উদাসীনতায় তা উপেক্ষা করতেন; কারোর বিরুদ্ধে কোনো নালিশ করতেন না। এই বিদ্যালয় থেকে 1897 সালে শেষ প্রাথমিক পরীক্ষায় বসেন। ইংরাজি, তামিল, গণিত ও ভূগোল বিষয়গুলি নিয়ে তিনি শেষ প্রাথমিক পরীক্ষায় তাঞ্জোর জেলার পরীক্ষার্থীদের মধ্যে প্রথম হন।

এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে, রামানুজনের বয়স যখন পাঁচ বছরের কিছু বেশি তখন তাঁর 'উপনয়ন' অনুষ্ঠিত হয়। উপনয়ন হল ব্রাহ্মণ সন্তানদের প্রথম পৈতে পরার অনুষ্ঠান। এই অনুষ্ঠানের পরই পবিত্র বেদপাঠ, গায়ত্রী মন্ত্র জপ, সন্ধ্যা-বন্দনা প্রভৃতি কাজে ব্রাহ্মণদের অধিকার জন্মায়।

যাই হোক, শেষ প্রাথমিক পরীক্ষায় কৃতিত্বের সঙ্গে উত্তীর্ণ হয়ে তিনি 1898 সালের জানুয়ারি মাসে কুম্ভকোনম টাউন হাই স্কুলে ভর্তি হন। কৃতিত্বের সঙ্গে পাশের জন্য তিনি অর্ধেক বেতনে পড়ার সুযোগ পান। তিনি ছয় বছর ধরে এই স্কুলেই অতিবাহিত করেন।

শৈশবে মা'র সবচেয়ে বেশি সাহচর্য পেয়ে রামানুজন বড়ো হয়েছিলেন বলে তাঁর উপর মা'র প্রভাব ছিল অপরিসীম। মজার কথা, চেহারায়ও মায়ের আদলের সঙ্গে তাঁর বেশ মিল ছিল। তবে ছোটো বয়সে রামানুজনের চেহারায় তেমন কোনো বৈশিষ্ট্য ছিল না, যাতে তাঁর সমবয়সীদের থেকে তাঁকে আলাদা বা অসাধারণ মনে

হতে পারে। কিন্তু তাঁর চোখ দুটি ছিল প্রখর উজ্জ্বল আর বোধহয় এই চোখ দুটি তাঁর উজ্জ্বল ভবিষ্যতের সাক্ষ্য দিত।

ধর্মপ্রাণা ও ভক্তিমতী কোমলতা ছিলেন নামগিরির একান্ত উপাসিকা। মায়ের প্রভাবে প্রভাবিত রামানুজনও গভীর ভক্তিভাবের অধিকারী ছিলেন। তাছাড়া তিনি ছোটো বয়স থেকে তাঁর দিদিমার স্বপ্নের কাহিনী শুনে আসছিলেন। ফলে দেবী নামগিরির উপর রামানুজনের এক অগাধ ভক্তি ও অনড় বিশ্বাস গড়ে উঠেছিল। পরবর্তীকালে তিনি বন্ধুদের কাছে বলেছেন তাঁর গাণিতিক অনুমান ও প্রজ্ঞার জন্য তিনি নামগিরির কাছে ঋণী। দেবী নাকি তাঁকে স্বপ্নে সূত্র বলে দিতেন বলে মন্তব্য করেছেন কেউ কেউ।

রামানুজনের জীবনে আচার-আচরণ-অভ্যাসের প্রভাব বুঝতে হলে তাঁর বড়ো হয়ে ওঠার পরিবেশ এবং ছোটোবেলার প্রেক্ষাপট বুঝতে হবে। হিন্দু ব্রাহ্মণের সনাতন পদ্ধতির মধ্যে তিনি বড়ো হয়ে উঠেছিলেন। তিনি উৎসবে, উপাসনায় অথবা সময় অতিবাহিত করার জন্য পরিবারের লোকজনের সঙ্গে মন্দিরে যেতেন। কখনো কখনো পরিবারের লোকজনদের থেকে দূরে থাকার জন্য এবং কোলাহল বা রৌদ্রতপ্ত দাহ থেকে পরিত্রাণ পাবার জন্য তিনি কাছের মন্দিরের নির্জন শীতলতা উপভোগ করতেন। শান্ত ও নির্জনতা বিলাসী হয়ে তিনি বড়ো হয়ে উঠছিলেন। সাধারণ সমবয়সীদের সঙ্গে গল্প করা বা ঘুরে বেড়ানোয় তিন একদম আগ্রহী ছিলেন না। তাঁর বাবা-মাও অন্যের সঙ্গে মেলামেশা পছন্দ করতেন না। তাই বাড়ির চার দেওয়ালের চৌহদ্দির মধ্যে তাঁর সময় কাটত। তবে কখনো কখনো বাইরে খেলতে থাকা ছেলেদের সঙ্গে জানালা দিয়ে কথা বলতেন। খেলাধূলায় তাঁর কোনো আকর্ষণ ছিল না। গোড়া থেকেই তিনি ভাবুক ও চিন্তাশীল যে ছিলেন, তাতে সন্দেহ নেই। পৃথিবীতে প্রথম মানুষ কে, আকাশ কত দূরে, তারার আকার কী, তারারা কত দূরে ইত্যাদি প্রশ্ন তিনি করতেন। এ সব প্রশ্ন শুনে মাষ্টার মশায়রা যত না বিস্মিত হতেন, তার চেয়ে বেশি অবাক হত সহপাঠীরা। তারা শুধু রামানুজনকে তাদের চেয়ে গণিতে বেশ ভালো মনে করত না, ভাবত রামানুজন গণিতে বিশেষ পারদর্শীও। ফলে গণিতের যে সব জটিল অঙ্কের সমাধান তারা করতে পারত না, তা রামানুজনকে দিত সমাধান করতে। রামানুজন খুশি মনে তা সমাধানের চেষ্টা করতেন এবং করেও দিতেন। যখন নিবিষ্ট মনে সমাধানের জন্য তিনি সচেষ্ট থাকতেন, তখন তিনি চারপাশ ভুলে গণিত নিমগ্নতায় বিভোর হয়ে থাকতেন। সহপাঠীদের অনেকে তখন তাঁর ইজেরের উপর পাথরের নুড়ি রেখে দিত, তা তিনি খেয়ালই

করতেন না। সমাধানের পর তিনি যখন উঠে দাঁড়াতেন, তখন নুড়িগুলো পড়ে যাবার সময় সবাই হেসে উঠত। এভাবে তাঁকে বোকা বানিয়ে তারা মজা পেত। রামানুজন কিন্তু এসব একদম ভ্রূক্ষেপই করতেন না। কেউ কেউ সহপাঠীদের সঙ্গে অনুরূপ ব্যবহার করার কথা বললেও তিনি রাজি হতেন না। এর ফলে তিনি শিক্ষক ও সহপাঠীদের কাছে এক বিশেষ মর্যাদা লাভ করতে থাকেন।

রামানুজনের অসাধারণ স্মৃতিশক্তি ছিল। তিনি মা'র কাছ থেকে ভক্তিগীতি, স্তোত্রপাঠ এবং পুরাণের বহু কাহিনী মুখে মুখে শুনেই শিখে ফেলেছিলেন। বড়ো হবার সঙ্গে সঙ্গে তিনি মা ও অন্যান্য প্রতিবেশীদের রামায়ণ, মহাভারত ও অন্যান্য ধর্মগ্রন্থ শোনাতেন। তিনি সংস্কৃত উচ্চারণ শুদ্ধ ও স্পষ্টভাবেই করতে পারতেন। বেদ ও উপনিষদের শ্লোক, তামিল ধর্মগ্রন্থ তিরুকুরালের সদ্‌বচন, অন্যান্য ধর্মগ্রন্থ ও তামিল রচনা সুন্দরভাবে আবৃত্তি করতে পারতেন। তিনি মাঝে মাঝে সারঙ্গপাণি মন্দিরে গিয়ে স্তোত্রের মাধ্যমে পূজা করতেন। সংক্ষেপে বলতে গেলে বলতে হয়, রামানুজন তাঁর মা'র কাছ থেকে ভালো ব্রাহ্মণ হয়ে গড়ে ওঠার প্রথাপ্রকরণ, রীতি-নীতি, পুরাণের কথা প্রভৃতি জেনেছিলেন। অর্থাৎ একজন ভালো ব্রাহ্মণ হবার জন্য কী করা এবং কী না করা উচিত, তা জেনেছিলেন।

বিচিত্র সব দিকে রামানুজনের আগ্রহ ছিল। ধর্মীয় অনুষ্ঠানে তিনি আকর্ষণ বোধ করতেন। পরবর্তী সময়ে তাঁর এক বন্ধু বলেছিলেন যে, পাশের নাচিয়ারকোভিল শহরে এক বিষ্ণু মন্দিরে ধর্মীয় অনুষ্ঠান দেখার জন্য তিনি ছ'মাইল পথ হেঁটে গিয়েছিলেন এক জ্যোৎস্নারাতে। যাবার সময় সারা রাস্তায় তিনি সহযাত্রীদের বেদ ও শাস্ত্র থেকে উদ্ধৃতি শোনাচ্ছিলেন এবং উদ্ধৃতির অর্থের ধারাভাষ্যও দিচ্ছিলেন। যাত্রা ও নাটকের প্রতিও তাঁর কৌতূহল কম ছিল না। পাঁচ ছয় মাইল রাস্তা হেঁটেও তিনি তা দেখতে যেতেন।

বলা যেতে পারে, কুম্ভকোনম টাউন হাই স্কুলেই গণিতের প্রতি রামানুজনের প্রগাঢ় আকর্ষণ ও অসাধারণ ব্যুৎপত্তির কথা সবার কাছে ধরা পড়ে। সহপাঠীরা ও শিক্ষক মশায়রা সবাই তাঁর গণিতমেধায় মুগ্ধ হতে থাকেন। সহপাঠীদের দেওয়া যে কোনো অঙ্ক রামানুজন সহজেই সমাধা করে দিতে পারতেন, তা অন্যদের কাছে খুব কঠিন অঙ্ক বলে মনে হলেও। এমন কী, স্কুলের শিক্ষকদের জন্য টাইম-টেবিল করার দায়িত্ব যখন অভিজ্ঞ গণিতশিক্ষক গণপতি সুব্বাইয়ার উপর ন্যস্ত হত, তখন তার দায়িত্ব তিনি রামানুজনের উপর দিয়ে নিশ্চিত হতেন। যে স্কুলে প্রায় বারো

শো ছাত্র এবং প্রায় চল্লিশজন শিক্ষক সেই স্কুলের টাইম-টেবিল তৈরি করা যে কী কঠিন কাজ, তা যাঁরা জানেন না বা যাঁদের অভিজ্ঞতা নেই তাঁরা ঠিক বুঝতে পারবেন না। বিশেষত সকলের সুবিধা-অসুবিধা, ক্লাসের সংখ্যা, বিষয়ে পারদর্শিতা সব কিছু মনে রেখে সকলের জন্য সমভারসম্পন্ন কাজের চাপ বণ্টন করা অত্যন্ত জটিল ও দুরূহ কাজ। কিন্তু রামানুজন এ কাজ এমন সুন্দরভাবে করতেন যে প্রত্যেক শিক্ষকই তা খুশি মনে গ্রহণ করতে এতটুকু দ্বিধা করতেন না।

নানা ঘটনার মধ্য দিয়ে রামানুজনের গণিত মানসিকতার সূক্ষ্মতা, বিশ্লেষণী শক্তির প্রখরতা ও বুদ্ধির তীক্ষ্ণতার পরিচয় ধীরে ধীরে পাওয়া যেতে থাকে। এমন একটি ঘটনার কথা বলা যাক। যখন তিনি 'third form'-এর ছাত্র (বর্তমানের অষ্টম শ্রেণীর সমতুল), তখন একদিন ক্লাশে গণিতশিক্ষক বোঝাচ্ছেন, 'তিনজনের মধ্যে তিনটি ফল সমান ভাবে ভাগ করে দিলে, প্রত্যেকে একটি করে পাবে। তেমনি হাজারটা ফল হাজার জনের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দিলে প্রত্যেকে একটি করে ফল পাবে।' এই বলে তিনি সামান্যীকরণ করে বলেন, 'যে কোনো সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হবে এক।' রামানুজন এই শুনে সঙ্গে সঙ্গে প্রশ্ন করলেন, 'শূন্যকে শূন্য দিয়ে ভাগ করলে কি ভাগফল এক হবে? কোনো ফল যদি কোনো ছেলেদের মধ্যে ভাগ করে না দেওয়া হয়, তাহলেও কি প্রত্যেকে একটি পাবে?' (If no fruits are divided among no one will each get one?) কী অপূর্ব গণিতভাবনার সূক্ষ্মতা!

1936 সালে হার্ভার্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রতিষ্ঠার ত্রিশত বর্ষপূর্তি অনুষ্ঠানের অঙ্গ হিসাবে গণিতের বিখ্যাত অধ্যাপক জি এইচ হার্ডিকে বক্তৃতা দেবার জন্য আমন্ত্রণ করা হয়। সেই বক্তৃতায় তিনি রামানুজনের সম্বন্ধে বলেছিলেন, 'মাত্র একটি ব্যাপারে তাঁর (রামানুজনের) মূল্যায়নে আমরা একমত হতে পারি। প্রকৃত অর্থে তিনি ছিলেন অনন্য গণিতজ্ঞ—এক কিংবদন্তী'। কিংবদন্তীই বটে! যখন তিনি fourth form-এর ছাত্র, তখন একদিন তাঁকে তাঁর উঁচু ক্লাসের এক ছাত্র একটি অঙ্ক দিল। অঙ্কটি হল :

'যদি $\sqrt{x} + y = 7$ এবং $x + \sqrt{y} = 11$ হয়, তবে x এবং y -এর মান কী কী?'

প্রশ্ন শুনেই রামানুজন সঙ্গে সঙ্গে উত্তর দেন $x = 9$ এবং $y = 4$।

রামানুজনের পরিবারের আর্থিক অবস্থা যে ভালো নয়, তা আমরা জেনেছি।

বাড়ির এই আর্থিক অসচ্ছলতা দূর করতে অনেক সময় কলেজের ছাত্রদের বোর্ডার হিসাবে রামানুজনের বাড়িতে রাখা হত। যখন তিনি টাউন হাই স্কুলের ছাত্র তখন ত্রিচিনোপলি এবং তিরুনোভেলির দু'জন কলেজ-পড়া ছাত্রকে তাঁদের বাড়িতে রাখা হয়। গণিতের প্রতি রামানুজনের তীব্র আকর্ষণ দেখে তারা তাদের জানা গণিত রামানুজনকে শেখাতে থাকে। কয়েক মাসের মধ্যে তাদের গণিতের জ্ঞানভাণ্ডার রামানুজনের কাছে উজাড় হয়ে যাবার পর, কলেজ থেকে গণিতের বই নিয়ে আসার জন্য রামানুজন তাদের পীড়াপীড়ি করেন। তখন তারা তাঁর জন্য এস এল লোনির (S.L.Loney) ত্রিকোণমিতি নিয়ে আসে। এই সময় রামানুজনের বয়স ছিল তেরো বছর। তারা হতবাক হয়ে যায়, যখন দেখে শুধুমাত্র বইটির তত্ত্বের অনুধাবন নয়, অন্যের কোনো সাহায্য ছাড়া সমাধানের জন্য দেওয়া প্রত্যেকটি অঙ্ক তিনি সমাধান করেছেন।

রামানুজন স্কুলে পড়ার সময় তাঁর চেয়ে উঁচু শ্রেণীর একজন ছাত্রের কাছ থেকে ঘন সমীকরণ (cubic equation) কী ভাবে সমাধা করতে হয়, তা সহজে শিখে ফেলেন। তিনি যে অসাধারণ তা তাঁর প্রতিটি কাজের মধ্যে প্রকাশ পেতে থাকে। সাধারণত স্কুলে ত্রিকোণমিতি অপেক্ষককে সমকোণী ত্রিভুজের দুটি বাহুর অনুপাত হিসাবে শেখানো হয়। কিন্তু রামানুজন সেভাবে না শিখে তা শেখেন অসীম শ্রেণী সম্বলিত জটিল ও আধুনিক ধারণার মাধ্যমে।

এখানে এটা বলা প্রয়োজন যে, রামানুজন প্রখর স্মৃতিশক্তির জোরে অনেক কিছুই মনে রাখতে সমর্থ ছিলেন। তিনি অবলীলাক্রমে অমূলদ সংখ্যা π, e, $\sqrt{2}$ -এর আসন্ন মান যে কোনো দশমিক স্থান পর্যন্ত বলে দিতে সক্ষম ছিলেন।

গণিত বিষয়ে তাঁর পারদর্শিতা, গাণিতিক সমস্যা সমাধানে তাঁর দক্ষতা সবাইকে মুগ্ধ করত। তেরো বছর হতে না হতেই তিনি 'exceptional boy' হিসাবে বিবেচিত হতে থাকেন। তাঁর থেকে দু' শ্রেণী উঁচুতে পড়া ছাত্র যে সব অঙ্ককে কঠিন মনে করত, সেগুলি রামানুজনের কাছে নিয়ে গেলে তিনি প্রায় সঙ্গে সঙ্গেই সমাধান করতে পারতেন। মাঝে মাঝে কলেজের ছাত্ররা তাঁর কাছ থেকে কঠিন অঙ্ক সমাধা করে নিয়ে যেত। এ সম্বন্ধে একদা রামানুজনের সহপাঠী হরি রাও-এর মুখে শোনা যাক, 'In this period his teachers and classmates were struck by his amazing powers and he readily helped one and all including even undergraduates who came to him for getting difficult problems solved.'

রামানুজনের গণিতপ্রতিভার প্রথম স্বীকৃতির কথা বলতে গেলে 'কে রঙ্গনাথ রাও পুরস্কারের' কথা উল্লেখ করতে হয়। কুম্ভকোনমের টাউন হাই স্কুলের বার্ষিক পুরস্কার বিতরণী সভায় 1903 সালের শেষ বার্ষিক পরীক্ষায় গণিতে বিশেষ কৃতিত্বের জন্য রামানুজনকে এই পুরস্কার দেওয়া হয়। পুরস্কার দেবার সময় সকলের কাছে প্রধান শিক্ষকের মন্তব্য হল যে, স্কুলের গণিতশিক্ষককের মতে এই বিষয়ে একশো'র মধ্যে একশো দিলেও ওর প্রতি সুবিচার করা হয় না। 'সর্বোচ্চ নম্বরের চেয়েও অনেক বেশি নম্বর পাওয়ায় সে যোগ্য' কথাটা অদ্ভুত মনে হলেও সত্য। কারণ, তাঁর এক সহপাঠীর কথা—'তিন ঘন্টার অঙ্ক পরীক্ষা ও বরাবর এক ঘন্টায় শেষ করত। শুধু তাই নয়, অনেক অঙ্ক আবার তিন-চার রকমভাবে সমাধা করত।'

এবারে একটা ঘটনার কথা বলা যেতে পারে, যাকে রামানুজনের গণিত সাধনার জীবনের 'turning point' হিসাবে আখ্যা দেওয়া যায়। ঘটনাটা আপাত দৃষ্টিতে এমন কিছু নয় বলে মনে হলেও যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ এবং এর গভীর ছাপ থেকে গেছে রামানুজনের জীবনে। 1903 সালের কোনো এক সময়ে জর্জ স্কুলব্রিজ কার -এর (George Schoolbridge Carr) লেখা 1886 সালের প্রকাশনার 'A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics' বইটি রামানুজনের হাতে আসে। এই বইটি যেন তাঁর প্রতিভার সুপ্ত অবস্থাকে জাগিয়ে তুলল। বইটি 'first aroused Ramanujan's full power'। তাঁর জীবনীকার রামচন্দ্র রাও ও পি ভি সেশু আয়ারের কথায়, 'Through this the new world thus opened to him. Ramanujan went ranging with delight.' কিন্তু বইটিতে কী ছিল এবং লেখক ছিলেন কেমন প্রতিথযশা? লেখক কার ছিলেন কেমব্রিজের গোনভিল্লে এবং কেউস কলেজের (Gonville and Caius College) একদা স্কলার। তিনি লন্ডনে গৃহশিক্ষকতা (private coach) করতেন। যখন তাঁর বয়স চল্লিশ তখন তিনি কেমব্রিজে স্নাতক হতে এলেন। তিনি ছাত্রদের জন্য গৃহশিক্ষকতার উদ্দেশ্যে নানা সূত্র, উপপাদ্য, সমস্যার সমাধানের সংক্ষিপ্তসার লিখে রাখতেন। এই সব নিয়েই তাঁর বই দুই খণ্ডে ছাপা হয়, প্রথম খণ্ড 1880 সালে এবং দ্বিতীয় খণ্ডটি 1886 সালে। হার্ডির কথায় 'He (Carr) is now completely forgotten, even in his college, except in so far as Ramanujan kept his name alive.' আর বইটি সম্বন্ধে বলতে গেলে বলতে

হয় এতে ছিল বীজগণিত, জ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি, অবকল, সমাকল, অবকল সমীকরণ প্রভৃতি শাখা নিয়ে নানা সূত্র ও উপপাদ্য। এগুলি সংখ্যায় 4865টি, যদিও বইটিতে লেখা এই সব সূত্র বা উপপাদ্যের শেষেরটির নম্বর ছিল 6165। সংখ্যার এই পার্থক্যের এক মজার কারণ আছে। যদিও প্রতিটি অধ্যায়ের প্রতিটি সূত্র বা উপপাদ্যগুলির নম্বর পর পর অবিচ্ছিন্নভাবে লেখা, কিন্তু একটি অধ্যায়ের নম্বর শুরু হয়েছে হয়তো 101 বা 201 বা এই রকম কোনো সংখ্যা থেকে। এভাবে 1300 সংখ্যক সূত্র বাদ গেছে। তবে এই সব সূত্র বা উপপাদ্যের বেশির ভাগ ক্ষেত্রে কোনো প্রমাণ বা বিশ্লেষণ নেই। যে সব ক্ষেত্রে আছে তাকে প্রমাণ না বলে 'cross-reference' বলা ভালো এবং এগুলো হল বইটির সবচেয়ে দুর্বল বা আকর্ষণহীন অংশ। উদাহরণ হিসাবে বলা যায় উপপাদ্য 245-এর প্রমাণের জন্য লেখা আছে 'উপপাদ্য 243, 244 দ্বারা' অর্থাৎ 243 নং উপপাদ্য এবং 244 নং উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করা যাবে। অথবা, 2912 নং উপপাদ্যের জন্য লেখা '2911 নং উপপাদ্যে x-এর বদলে πx লিখে পাওয়া যাবে'। তবে উপপাদ্যগুলি 'সুসম্বদ্ধ ভাবে এবং পুরোপুরি বিজ্ঞানসম্মত ভাবে সাজানো'। বইটি সম্বন্ধে হার্ডির মন্তব্য, 'The book is not in any sense a great one, but Ramanujan made it famous and there is no doubt it influenced him (Ramanujan) profoundly.'

কারের বইটি রামানুজনের কাছে যেন এক অজানা নূতন গণিতজগৎ উন্মোচন করল। 'রামানুজনের কাছে প্রতিটি উপপাদ্য যেন তাঁর নিজস্ব গবেষণা-প্রকল্প'। তিনি নিজে আবিষ্কারের আনন্দে মেতে গেলেন। একের পর এক সূত্র ও উপপাদ্য তিনি আবিষ্কার করতে লাগলেন। 1903 সালের কোনো এক সময়ের পর তিনি এগুলি লিখে রাখতে শুরু করেন—যা পরবর্তী সময়ে তাঁর বিখ্যাত 'নোটবই' -এর (Notebooks) রূপ পরিগ্রহণ করে। তবে নোটবইতে 'সংক্ষিপ্তসার' (synopsis) -এর প্রভাব যে কী তীব্রভাবে কাজ করেছে, তা বিশেষভাবে মনে রাখা দরকার। কারের বইয়ের উপস্থাপনার ধারা রামানুজনের নোটবইতে স্বমহিমায় বর্তমান, বলতে গেলে প্রমাণের কোনো প্রয়াস নেই। 'Any student of notebooks can see that Ramanujan's ideal presentation had been copied from Carr's.'

রামানুজনের কাছে সে কালের গণিতের বিখ্যাত বইগুলি পৌঁছোয় নি। এখন মনে প্রশ্ন জাগে, তিনি যদি কারের বই পাওয়ার সময় ব্রোমউইচের (Bromwich) 'Theory of Infinite Series' বা হুইট্যাকারের (Whittaker) 'Modern

Analysis' হাতে পেতেন, তবে রামানুজনের কাজের ধারা ও ধরনকে কেমনভাবে পাওয়া যেত বা আর কত বেশি মৌলিক আবিষ্কার করতে পারতেন রামানুজন? যদিও হার্ডির ধারণা, 'There can be not doubt that either of these books would have made a tremendous difference to him if they could have come to him.' উল্লেখ করা যেতে পারে সি এল টি গ্রিফিথকে (C.L.T. Griffith) পরবর্তীকালে লেখা চিঠিতে (3.12.1912) এম জে হিল (M. J. Hill) রামানুজনের লেখা সম্বন্ধে মূল্যায়ন করতে গিয়ে তাঁকে ব্রোমউইচের বই পড়ার উপদেশ দিয়েছিলেন। কী হলে কী হত তা ভেবে আজ আমরা কীই বা করতে পারি? তবে নিশ্চয় রামানুজনের নোটবই লেখার রীতি পাল্টে যেত, তাঁর লেখার মধ্যে প্রমাণের প্রচলিত সনাতন পদ্ধতিকে আমরা হয়তো পেতে পারতাম। এখন এ সব ভেবে লাভ নেই। তাঁর জীবনে এর পরের কী ঘটনাগুলি ঘটেছিল, তা জেনেই তাঁর জীবননাট্যের হিন্দোলের রস উপভোগ করা যাক।

1903 সালে কুম্ভকোনম হাইস্কুল থেকে তিনি মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের ম্যাট্রিকুলেশান পরীক্ষায় বসলেন। পরীক্ষায় তিনি কৃতিত্বের সঙ্গে উত্তীর্ণ হন। শেষ হয় তাঁর বিদ্যালয় জীবনের পর্ব।

মহাবিদ্যালয়ে

ম্যাট্রিকুলেশান পরীক্ষায় পাশ করে রামানুজন 1904 সালে কুম্ভকোনমের সরকারি কলেজে এফ এ কোর্সে ভর্তি হন। তিনি ম্যাট্রিকুলেশন পরীক্ষা সসম্মানে প্রথম বিভাগে উত্তীর্ণ হন। গণিত ও ইংরাজি বিষয়ে বিশেষ কৃতিত্বের জন্য জুনিয়ার সুব্রমনিয়াম বৃত্তিও তিনি লাভ করেন। এফ এ কোর্সে তাঁকে পড়তে হবে ইংরাজি, সংস্কৃত, গণিত, শারীরতত্ত্ব, রোমান ও গ্রিক ইতিহাস।

কলেজে ঢোকার আগে থেকেই কারের বইয়ের প্রভাবে প্রভাবিত রামনুজনের মন-প্রাণ-হৃদয় জুড়ে গণিত নিয়ে আলোড়ন। গণিত ভাবনায় তিনি বিহ্বল, গণিতের তীব্র আকর্ষণে তিনি আবিষ্ট। কঠিন কঠিন অঙ্ক কষার মজায় তিনি উদ্বুদ্ধ, নূতন নূতন সূত্র ও উপপাদ্য আবিষ্কারের আনন্দে তিনি মশগুল। তাঁর সাধনার স্রোত অনির্বাণ গতিতে প্রবাহিত—কখনও মধ্যরাত, কখনও ভোরের আলো দেখা পর্যন্ত। এতে কোনো শ্রান্তি বা ক্লান্তি নেই, আছে শুধু আনন্দ আর আনন্দ। উদ্ভাবিত সূত্র ও উপপাদ্যগুলি তিনি শুধু লিখে রাখছেন। আর্থিক দুরবস্থার ফলে লেখার জন্য পর্যাপ্ত কাগজ কেনার ক্ষমতা নেই। তাই শ্লেট-পেনসিলই সম্বল। শ্লেটে গণনা করছেন আর লিখছেন, মুছে দিচ্ছেন ডান কনুই দিয়ে। শুধু কাগজে টুকে রাখছেন চূড়ান্ত ফল। এ ভাবে তাঁর নোটবইয়ের পাতাগুলো ভরে উঠতে থাকে—সৃষ্টি হতে থাকে গণিতশাস্ত্রের এক পরম সম্পদ।

কলেজে ঢুকেও এই ধারা অব্যাহত থাকে। গণিতই হয়ে উঠল সারাক্ষণের সাহচর্য। বিষয়টির উপর তাঁর আগ্রহ তীব্র থেকে তীব্রতর হল। গণিতই হয়ে উঠল শয়ন-স্বপন-নিদ্রাজাগরণের সর্বক্ষণের সঙ্গী, ধ্যান-জ্ঞান ও অবসর বিনোদনের উপকরণ। অন্যান্য বিষয়ের প্রতি তাঁর কোনো প্রকার আগ্রহই থাকল না।

সে সময়কার চিত্র বিভিন্ন লেখার মধ্যে আমরা পেতে পারি। কুম্ভকোনমেব সরকারি কলেজে পড়ার সময় তাঁর সহপাঠী হরি রাও -এর সঙ্গে তাঁর বেশ বন্ধুত্ব গড়ে উঠেছিল। হরি রাও-এর বয়ানে যা জানা যায়, তা হল—ক্লাসে রামানুজনের চারপাশে কী ঘটছে সে সম্বন্ধে তাঁর কোনো মনোযোগ বা উৎসাহ ছিল না। গণিত ছাড়া অন্য বিষয় প্রতি তিনি বিন্দুমাত্র আকর্ষণ বোধ করতেন না। সব সময় তিনি অঙ্কই করে চলেছেন। কারণ, তিনি ছিলেন 'preoccupied with his own researches and reducing them to write and incorporating them in notebooks after notebooks.' এ ব্যাপারে ই এইচ নেভিলকে (E. H. Neville) উদ্ধৃত করা যেতে পারে, 'ইতিহাস বা শারীরতত্ত্বের কোনো বক্তৃতার ক্লাশে তাঁর দৈহিক উপস্থিতিকে কলেজের নিয়ম নিশ্চিত করতে পারে, কিন্তু মন তাঁর মুক্ত অথবা বলা উচিত তাঁর প্রতিভার দাস।'

গণিতের ক্লাশে তিনি উজ্জ্বল থেকে উজ্জ্বলতর। শিক্ষক মশায়রা তাঁর গণিত প্রতিভাকে সমীহ করেন। সহপাঠীরা তাঁর সম্বন্ধে কী ভাবেন, তা হরি রাও-এর কথায় শোনা যাক, 'সংখ্যার দেবী যেন তার (রামানুজনের) সামনে নৃত্যরতা, তিনি যেন কোনো কিছুই গোপন না রেখে সব রহস্য রামানুজনের কাছে উন্মোচন করে দিতেন। রামানুজন এক কোটি সংখ্যা পর্যন্ত সব মৌলিক সংখ্যা পুনরাবৃত্তি করতে পারত। সে আমাকে ম্যাজিক বর্গ গঠনের পদ্ধতিও শিখিয়েছিল।'

গণিত নিয়ে সময় কাটানোতে তিনি মাঝে মাঝে শিক্ষকদের প্রশয়ও পেয়েছেন। গণিতের অধ্যাপক পি ভি সেশু আয়ার ক্লাশে রামানুজন নিজের মনে যে অঙ্ক কষে চলেছেন, তাই করতে দিতেন। এমন কী London Mathematical Gazette-এ প্রকাশিত গাণিতিক সমস্যার সমাধানে তাঁকে উৎসাহিত করতেন। কিন্তু এটা বলা দরকার যে, তিনি গণিতে রামানুজনকে উৎসাহিত করলেও অন্য বিষয়ের প্রতি অবহেলা না করার উপদেশ দিতেন।

গণিত সম্বন্ধে রামানুজনের দক্ষতার কথা বলতে গিয়ে হরি রাও বলেছেন, 'সে (রামানুজন) কখনো কখনো পাটিগণিত থেকে বীজগণিতে, বীজগণিত থেকে ত্রিকোণমিতিতে, এমন কী উচ্চতর গণিতে লাফিয়ে চলে যেত এবং সাধারণ প্রয়োগের জন্য উপপাদ্য বা সূত্র উদ্ভাবন করত।'

অন্য বিষয়ের প্রতি উদাসীনতা বা অমনোযোগ কিন্তু মাঝে মাঝে দু'একজনের দৃষ্টি আকর্ষণ করেছে এবং তাঁরা রামানুজনকে সব বিষয়ে সমান মনোযোগ দেবার জন্য বলেছেনও। একজন অধ্যাপক যখন দেখলেন কলেজ লাইব্রেরি থেকে নেওয়া 'Integral Calculus'-এর একটি বই রামানুজনের দৃষ্টি সবচেয়ে বেশি আকর্ষণ করছে, অন্য বিষয় পড়ার বিঘ্ন সৃষ্টি করছে, তখন তিনি রামানুজনকে তা ফেরত দেবার নির্দেশ দেন। কিন্তু 'ভবি ভোলে না'। গণিতও রামানুজনকে ছাড়ে না। তাই স্বাভাবিক কারণে অন্য বিষয়গুলি উপেক্ষিত হতে থাকে তাঁর কাছে। এর ফল হল তীব্র, মারাত্মক, অনভিপ্রেত কিন্তু অনিবার্য। ইংরাজিতে তিনি পাশ করতে পারলেন না, অথচ ম্যাট্রিকুলেশন পরীক্ষায় গণিত ও ইংরাজিতে বিশেষ কৃতিত্বের জন্য তিনি বৃত্তি পেয়েছিলেন। ফলে উচ্চতর এফ এ ক্লাশে তাঁর প্রমোশন হল না। সেটা হল

1905 সালের জানুয়ারি মাস। তিনি বৃত্তিটি (জুনিয়ার সুব্রমনিয়াম বৃত্তি) হারালেন। মনে রাখা দরকার যে, বৃত্তিটি শুধু রামানুজনেব কাছে মর্যাদার প্রশ্ন ছিল না, এর সঙ্গে তাঁর পরিবারের আর্থিক সঙ্গতি-অসঙ্গতির দিকটাও জড়িত ছিল। প্রতিটি বর্ষের জন্য চাই বত্রিশ টাকা, যা তাঁদের কাছে কম নয়। এ টাকাটা তাঁর বাবার দেড় মাসের আয়ের চেয়ে বেশি। মা কোমলতা অধ্যক্ষের কাছে দরবার করতে এলেন। গণিত বিষয়ে রামানুজনের স্বকীয়তা ও অসাধারণতার কথা বলে তিনি বৃত্তি বহাল রাখার আবেদন করলেন। অধ্যক্ষ বেশ নম্র ও সহানুভূতিশীল হলেও দৃঢ় ছিলেন। 'Rules were rules'। অতএব হারানো বৃত্তি আর বহাল হল না। এ সম্বন্ধে 1936 সালে 31 আগষ্টে হার্ভার্ডে হার্ডির বক্তৃতার অংশ বিশেষ উল্লেখযোগ্য, 'There was no gain at all when the college at Kumbakonam rejected the one great man they had possessed. and the loss was irreparable, it is the worst instance that I know of damage that can be done by an inefficient and inelastic educational system.'

এক অসহনীয় অবস্থার সামনে এসে পড়লেন রামানুজন। তিনি কিছু কঠিন সত্যকে উপলব্ধি করলেন এবং তাঁর জানা বিষয়গুলি বার বার তাঁর সামনে হাজির হতে লাগল—এটা সবাই জানে যে, তিনি বৃত্তি হারিয়েছেন, বাবা-মার প্রচণ্ড আর্থিক অনটন, অন্য বিষয়ে ভালো ফল করার চাপ অনুভব করলেও এ সব বিষয়ের জন্য গণিতকে দূরে সরিয়ে রাখতে পারেন নি। তাঁর জীবনীকার ক্যানিগেলের কথায়, 'He was torn and miserable. He endured the situation until he could endure it no longer.' তাই তিনি বাড়ি থেকে পালিয়ে গেলেন—1905 সালের আগষ্ট মাসের প্রথম দিকে। কাউকে কিছু না বলে তিনি রেলে করে ভিজাগাপত্তমে অন্তর্ধান করলেন, যাকে ক্যানিগেল রামানুজনের মহান অন্তর্ধানগুলির (great disappearances) প্রথম বলে অভিহিত করেছেন। বাড়ির সবাই চিন্তিত। মাদ্রাজ ও ত্রিচিনোপলিব এখানে ওখানে বাবা ছেলের খোঁজ করে হতাশ হন। অবশেষে সেপ্টেম্বরের আগেই তিনি কুম্ভকোনমে ফিরে এসে বাবাকে নিশ্চিন্ত করেন।

এই প্রথম 'মহান অন্তর্ধান' প্রসঙ্গে বলতে গিয়ে ক্যানিগেল বলেছেন যে, রামানুজন তাঁর জীবনে বহুবার এ রকম হঠাৎ ও অসতর্ক কাজের শিকার হয়েছেন, যখন তিনি এমন পরিস্থিতির মুখোমুখি হয়েছেন যাকে তাঁর আত্মসম্মান ও আত্মপ্রতিষ্ঠার ক্ষেত্রে আঘাত হিসাবে তিনি বিবেচনা করেছেন। এ প্রসঙ্গে এখানে

দু'টি ঘটনার কথা বলা যেতে পারে।

1897 সালে প্রাথমিক পরীক্ষায় পাটিগণিত অংশে রামানুজন 45-এর মধ্যে 42 নম্বর পান, অথচ তাঁর এক সহপাঠী পান 43 নম্বর। এতে রামানুজন প্রচণ্ড ক্ষুব্ধ ও হতাশ। তিনি সহপাঠীটির সঙ্গে কথাই বললেন না। সহপাঠীটি তাঁকে এই বলে সান্ত্বনা দিয়ে বোঝাবার চেষ্টা করলেন যে, অন্যান্য বিষয়ে তো রামানুজন তাঁর থেকে বেশি নম্বর পেয়েছে। কিন্তু তাতে কিছুই হল না। অসন্তুষ্ট রামানুজন বিড় বিড় করে বলতে লাগলেন, 'সব সময় পাটিগণিতে সবচেয়ে বেশি নম্বর পাই, এবারে যে তা পাই নি—এটা তো সবাই জানল।' এ অবস্থা তাঁর কাছে অসহনীয়। ফলে কাঁদতে কাঁদতে তিনি বাড়িতে মায়ের কাছে হাজির হলেন।

এমনতরো আর একটি ঘটনা হল ত্রিকোণমিতির অপেক্ষক নিয়ে। ত্রিকোণমিতির অপেক্ষকগুলিকে সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর অনুপাত হিসাবে বিবেচনা না করে অসীম শ্রেণীর সাহায্যে প্রকাশ করতে পেরে রামানুজন আবিষ্কারের আনন্দে আত্মতৃপ্ত। পরে যখন তিনি জানলেন এই আবিষ্কার গণিতজ্ঞ অয়লার অনেক কাল আগেই করে গেছেন, তখন তিনি এমন হতাশ ও বিষাদগ্রস্ত হলেন যে তা বলার নয়। তিনি রেগেমেগে যে কাগজে সূত্রগুলি লিখে রেখেছিলেন তা টুকরো টুকরো করে ছিঁড়ে ফেলেন।

যাই হোক, বৃত্তি হারিয়ে মনের দুঃখে পালিয়ে গিয়ে যখন ফিরে এলেন, তখন কোনো কিছু করা যায় কিনা সে সম্বন্ধে উপায় খুঁজতে লাগলেন। বাড়ির আর্থিক অনটনের কথা তাঁর জানা। তিনি এও জানেন যে, অর্থ উপার্জনের জন্য চাকরির প্রয়োজন আর সে জন্য চাই বিশ্ববিদ্যালয়ের ডিগ্রি। তাই অন্তর্ধানের কয়েকমাস পর আবার কুম্ভকোনমের সরকারি কলেজে যোগ দিলেন। কিন্তু 1905 সালের জন্য নির্ধারিত বর্ষের পরীক্ষা বসার জন্য প্রয়োজনীয় উপস্থিতির সংখ্যা নির্দিষ্ট সংখ্যার চেয়ে অনেক কম থাকায় সে বারেও পরীক্ষায় বসা হল না। অবশেষে হতাশ হয়ে 1906 সালে রামানুজন মাদ্রাজ চলে আসেন এবং বিখ্যাত পাচাইআপ্পা কলেজে আবার এফ এ ক্লাসে ভর্তি হন। গণিতে রামানুজনের বিশেষ ব্যুৎপত্তির কথা জেনে কলেজের অধ্যক্ষ জে এ ইয়েটস (J. A. Yates) রামানুজনকে অর্ধেক বেতনে পড়ার বৃত্তি মঞ্জুর করেন।

পাচাইআপ্পা কলেজে এসেও রামানুজনের গণিতনিবিষ্টতায় ছেদ নেই। গণিতের চৌম্বক আকর্ষণে তিনি আকর্ষিত । ক্লাসে গ্যালারির সবচেয়ে উঁচু সারির এক

কোণে বসে তিনি হারিয়ে যেতেন গণিতের নানা সমস্যার সমাধানে। অন্য বিষয়ে কী আলোচনা বা পড়ানো হচ্ছে সে সম্বন্ধে কোনো শোনার বালাই নেই। ফলে এই কলেজে এসেও ডিগ্রি পাবার লক্ষ্যে তাঁর এগোনো হচ্ছিল না। কুম্ভকোনমের সরকারি কলেজের অভিজ্ঞতার পুনরাবৃত্তি হতে থাকল পাচাইআপ্পা কলেজে। তবে সেখানে বাধা ছিল বিষয় হিসাবে ইংরাজি আর এখানে হল শারীরতত্ত্ব। একটি পরীক্ষায় পাচনতন্ত্রের উপর প্রশ্ন ছিল, তার উত্তরে তিনি লিখলেন, 'Sir, this is my undigested product of the Digestion chapter.' যদিও উত্তরপত্রের উপর কোনো নাম লেখা ছিলো না, তবুও এটা যে রামানুজনের খাতা তা বুঝতে কোন অসুবিধে হয় নি। পরে অবশ্য এ সব লেখার জন্য রামানুজন দোষ স্বীকার করেন।

এ কলেজে রামানুজনকে নিয়ে আর একটি ঘটনা ঘটে সংস্কৃত ক্লাসেও। রামানুজনের কলেজে যাবার পোশাক ছিল ধুতি, কালো কালিকট চেকের কোট আর লাল রঙের উলের টুপি, যাকে হাসান ক্যাপ বলা হত। তখনকার দিনে টুপি পরেই ক্লাশে আসার নিয়ম। একদিন কলেজে আসার সময় যখন ট্রামে উঠছেন, তখন দমকা হাওয়ায় টুপি উড়ে যায়। ফলে খালি মাথায় সংস্কৃত ক্লাসে তাঁকে ঢুকতে হল। সংস্কৃতের অধ্যাপক তাঁকে খালি মাথায় দেখে টুপি না পরে আসার কারণ জিজ্ঞেস করেন। রামানুজন ঘটনার কথা সবিস্তারে বললেন। এ সব শুনে অধ্যাপকমশায় রামানুজনকে টুপি কিনে আনতে বললেন। কিন্তু যখন জানলেন— এই সামান্য টুপি কেনার ক্ষমতাও তাঁর নেই, তখন খালি মাথায় ক্লাস করার অনুমতি দিলেন।

তবে গণিতের ক্লাসে রামানুজন এই কলেজেও অনন্যসাধারণ। পাচাইআপ্পা কলেজের গণিতের অধ্যাপক এন রামানুজচারিয়া ক্লাসে যখন কোনো অঙ্কের সমাধানের জন্য ডজন খানেক ধাপ ব্যবহার করতেন, রামানুজন তা তিন-চার ধাপেই সমাধা করতেন। অথবা, যদি তিনি কোনো অঙ্কের কিছু ধাপ করে চূড়ান্ত ফল কী হবে তা রামানুজনের কাছে জানতে চাইতেন, তখন মনে মনে তা সমাধা করে রামানুজন উত্তরটি বলে দিয়ে সমস্ত ক্লাসকে স্তম্ভিত করে দিতেন।

কখনো কখনো আবার তিনি গণিতের সিনিয়ার অধ্যাপক পি সিঙ্গারভেলু মুদালিয়ার সঙ্গে বসে গণিত-জার্নালে প্রকাশিত অঙ্কগুলি সমাধা করতেন। কোনো সমস্যা যদি রামানুজন সমাধান করতে না পেরে অধ্যাপক মশায়কে দিতেন, তাহলে

অঙ্কটি সারারাত ধরে চেষ্টা করেও অধ্যাপক মশায় তার সমাধান করতে পারতেন না।

পাচাইআপ্পা কলেজে তিনমাস পড়ার পর হঠাৎ তিনি অসুস্থ হয়ে পড়েন। তাই বামা-মার কাছে কুম্ভকোনমে তাঁকে ফিরে আসতে হল। ফলে কলেজে পড়ার ছেদ পড়ল তাঁর জীবনে। কিন্তু কলেজে পড়া আর ডিগ্রি পাওয়া এক কথা নয়। জীবনে সাফল্যের জন্য অর্থাৎ চাকরির জন্য অন্তত এফ এ ডিগ্রি অত্যন্ত জরুরি, এ কথা রামানুজনের বাবা তাঁকে বোঝালেন এবং রামানুজনকে রাজি করালেন পরীক্ষা দিতে। 1907 সালে তিনি প্রাইভেট পরীক্ষার্থী হিসাবে এফ এ পরীক্ষা দিলেন। কিন্তু ভাগ্যের কী পরিহাস! রামানুজনের কপালে এফ এ ডিগ্রি জুটল না -- গণিতে একশোর মধ্যে একশো পেয়েও অন্য বিষয়ে পাশ নম্বরের চেয়ে কম নম্বর পাবার জন্য। রামানুজনের জীবনে 'formal education'-এর সমাপ্তি ঘটল।

ই. এইচ. নেভিল

বৃত্তির সন্ধানে

এফ এ পরীক্ষায় ফেল করে কলেজে শিক্ষার আনুষ্ঠানিক সমাপ্তির মাধ্যমে জীবনের এমন এক সন্ধিক্ষণে রামানুজন প্রবেশ করলেন যাকে নানা ব্যক্তি নানা দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার করেছেন। কেউ বলেছেন, 'a set back to his career' ; কেউ বলেছেন, 'trying period' ; কেউ বলেছেন, 'years of adversity' ; আবার হয়তো অন্যজন বলেছেন 'care-free days'। যে যাই বলুন না কেন, রামানুজনের জীবনে এ এক বিশেষ অর্থবহ, তাৎপর্যময় এবং গুরুত্বপূর্ণ অধ্যায় যা তাঁর জীবনের ঘটনাগুলিকে সুদূরপ্রসারী করেছে এবং প্রাপ্তি-অপ্রাপ্তিতে, ঘাত-প্রতিঘাতে, ব্যর্থতা-সাফল্যে তার জীবনকাহিনীকে করে তুলেছে রোমাঞ্চকর রসঘন এক উপাখ্যান।

এফ এ ফেল করার পরবর্তী সময়ে রামানুজনের বাড়ির আর্থিক অবস্থা ছিল খুবই খারাপ। এমন কী মাঝে মাঝে রামানুজনকে অভুক্তও থাকতে হয়েছে। অর্থের প্রচণ্ড প্রয়োজন। রামানুজন প্রাইভেট টিউশানের সন্ধান করেন। দু' একটা জুটেও যায়। কিন্তু পড়ানোর সময় সিলেবাসের গণ্ডীর মধ্যে আটকে থাকা রামানুজনের ধাতে সয় না। কোনো একটা অধ্যায় পড়াতে গিয়ে তিনি বিষয়ের এমন গভীরে চলে যেতেন যে ছাত্রের কাছে তা দুর্বোধ্য হয়ে উঠত। ফলে সাধারণ ছাত্রের কাছে গণিতের গৃহশিক্ষক হিসাবে তিনি সফল নন, যদিও তিনি এই বিষয়টিকে সবচেয়ে বেশি ভালোবাসেন। গণিতের প্রতি মাত্রাতিরিক্ত ও প্রগাঢ় ভালোবাসার জন্য তিনি কলেজে বৃত্তি হারান, পরীক্ষায় ফেল করেন ; এমন কী গৃহশিক্ষকতায় ব্যর্থ। যেন তাঁর কোনো কিছুই নেই ; কিন্তু অন্য দৃষ্টিকোণ থেকে দেখলে বলা যায়, 'He had everything.' কারণ এখন তাঁর কাছে এমন কোনো কাজ নেই যা তাঁকে তাঁর নোটবইয়ের কলেবর বৃদ্ধি করার কাজে এতটুকু ব্যাঘাত সৃষ্টি করতে পারে। ফলে, 'Notebooks crammed with theorem. that each day. each week. bulged wider.' [ক্যানিগেল]। তাঁর গণিতচর্চা গতি পেল। বাইরের জগতের ঘটনা, আলোড়ন, বহমানতাকে ভুলে গিয়ে একাত্ম ও একাগ্র চিত্তে রামানুজন গণিতসাধনায় ধ্যানমগ্ন। 'In proving one theorem. he discovered many others' [নেভিল]। ফলস্বরূপ রামানুজনের নোটবইতে নিত্যনূতন সংযোজন এবং তাঁর নোটবইয়ের ওজনবৃদ্ধি।

রামানুজন ছিলেন গণিতের এক সুনিপুণ শিল্পী। সংখ্যা, তাদের সম্পর্ক আর তাদের প্রকাশ করার গাণিতিক ভাষা হল তাঁর শিল্পের মাধ্যম। তাঁর মনোরম তুলির টানে নূতন নূতন শিল্পে নোটবুকের ক্যানভাস ভরে উঠছে— অন্যের কাছে এর বোধগম্যতা সম্বন্ধে তাঁর কোনো ভাবনা নেই। এই সময়কার বর্ণনা করতে গিয়ে নেভিল একে 'the care-free days before 1909' হিসাবে চিহ্নিত করেছেন। 1909 সালের আগের নিটোল পাঁচ বছর সময় সত্যি তিনি কেবল নিবিড় গণিতসাধনায় ব্যাপৃত ; কিন্তু 'He (Ramanujan) received no guidance, no stimulation, no money beyond the few rupees from tutoring'। তবে দিনগুলি ছিল তাঁর জীবনের সবচেয়ে বেশি 'productive'। এ প্রসঙ্গে ক্যানিগেলের মন্তব্য উল্লেখের দাবি রাখে। তিনি লিখেছেন, 'রামানুজন গণিতের মধ্যে তাঁর এমন ঘর খুঁজে পেয়েছেন যা তাঁর কাছে পুরোপুরি আরামদায়ক, যাকে ত্যাগ করার ইচ্ছে প্রায় কখনোই আসে না। বুদ্ধিগতভাবে, নান্দনিকভাবে, আবেগজড়িতভাবে এবং অবশ্যই আধ্যাত্মিকভাবে এ ঘর রামানুজনকে সন্তুষ্ট করে।' আধ্যাত্মিকভাবে সন্তুষ্টির কথা বলা হয়েছে কারণ এক সময় রামানুজন বলেছিলেন, 'An equation has no meaning unless it expresses thought of God.'

কিন্তু এ ভাবে গণিত-নিমগ্নতা বাবা-মার ভালো লাগে না। তাই তাঁদের নজর এড়িয়ে, লুকিয়ে রামানুজনের গণিতচর্চা চলতে থাকে। তিনি মেতে ওঠেন সৃষ্টিসুখের আনন্দে ; কিন্তু বাবা-মা সন্তুষ্ট থাকতে পারেন না। ছেলের মতিগতি ফেরাতে, সংসারের প্রতি আকৃষ্ট করতে সেই সময়কার ভারতীয়দের চিরাচরিত পথ ধরে রামানুজনের বিয়ের বন্দোবস্ত করেন। 1909 সালে জানকী দেবীর সঙ্গে রামানুজনের বিয়ে হল, যদিও 1908 সালে বাগ্‌দান হয়েছিল। রামানুজনের সঙ্গে জানকী দেবীর বিয়ের কাহিনীও কিন্তু কম ঘটনাবহুল নয়।

ত্রিচি জেলার অন্তর্গত কাবেরী নদীর তীরে অবস্থিত রাজেন্দ্রম গ্রামে কোমলতাম্মলের ছোটোবেলার বান্ধবী রঙ্গনায়কীর (যিনি কাক্কাম্মল হিসাবেও পরিচিত) স্বামীগৃহ। তাঁর স্বামী রঙ্গস্বামী আয়েঙ্গার ঐ গ্রামের এক জমিদার। তাঁদের পাঁচজন মেয়ে এবং একজন ছেলের মধ্যে প্রথম দু'জন মেয়ের বিয়ে হয়ে গেছে, তৃতীয়টিরও বিয়ে স্থির হয়ে আছে। 1908 সালের কোনো এক সময় তাঁদের বাড়িতে এসে কোমলতাম্মল কাক্কামলের সঙ্গে নয় বছরের মেয়েকে দেখে সে তাঁর বান্ধবীর মেয়ে কিনা এবং তার নাম কী জানতে চাইলেন কাক্কাম্মলের কাছে। বান্ধবীর উত্তর

পাওয়ার আগেই মেয়েটি উত্তর দিল যে, সে কাক্কাম্মলের মেয়ে এবং তার নাম জানকী। সব শুনে কোমলতার খুব ভাল লেগে গেল এবং তিনি এমন খুশি হলেন যে রামানুজনের সঙ্গে জানকীর বিয়ের প্রস্তাব দেন। দু'জনের কোষ্ঠীর মিলও দেখা গেল। কিন্তু রামানুজনের বাবা শ্রীনিবাস আয়েঙ্গার এ সম্বন্ধে একদম খুশি ছিলেন না। তবে তিনি স্ত্রীর পীড়াপীড়িতে অবশেষে মত দিলেও বিয়ের দিন আর বরের সঙ্গে গেলেন না। বিয়ের দিন ধার্য হয়েছিল রঙ্গস্বামীর তৃতীয় মেয়ের বিয়ের দিনই। কিন্তু বিয়ের দিন ট্রেন লেট থাকায় বরযাত্রীদের পৌঁছোতে খুব দেরি হয়। দেরি দেখে বিয়ে প্রায় ভেঙে যেতে বসেছিল। ক্রুদ্ধ রঙ্গস্বামী অন্য একজনের সঙ্গে জানকীর বিয়ে প্রায় ঠিক করে ফেলেছিলেন। যাই হোক, শেষে রামানুজনের সঙ্গেই জানকীর বিয়ে হয়। দিনটি ছিল 1909 সালের 14ই জুলাই। কিন্তু বিয়ের সময় দুটি ঘটনা ঘটে— বর-কনের মালা বদলের সময় একটি মালা মাটিতে পড়ে যায় এবং বিয়ের মণ্ডপে আংশিকভাবে আগুন লেগে যায়, যদিও তা তাড়াতাড়ি নেভানো হয়। এগুলোকে লোকে অশুভ ইঙ্গিত হিসাবে ভাবলেও কোমলতা কোনো পাত্তাই দিলেন না। বিয়ের পর ছেলেকে নিয়ে তিনি কুম্ভকোনমে ফিরে আসেন। এর তিন বছর পর 1912 সালে রজঃস্বলা হবার পর জানকী কুম্ভকোনমে আসেন।

বিয়ের পর তীব্র আত্মজ্ঞানসম্পন্ন রামানুজন বাবা-মার ভার হয়ে থাকতে চাইলেন না। তাই চলে জীবিকার সন্ধান। এর পর রামানুজনের ভবিষ্যৎকে নিয়ন্ত্রিত এবং প্রভাবিত করার জন্য যেন একের পর এক ঘটনা নাটকীয় ভাবে ঘটতে থাকে। ঘটনাগুলি যেন এক রসোত্তীর্ণ উপন্যাসে ছড়িয়ে থাকা সাড়া জাগানো কাহিনী ছাড়া আর কিছু নয়। রামানুজনের জীবন সম্বন্ধে বলতে গিয়ে বি এম উইলসন (B.M.Wilson) ঠিকই বলেছেন, 'Part of it (Ramanujan's life) might be lifted almost unchanged by the scenario-writer for the talkies.' মাদ্রাজে পোর্ট ট্রাস্ট অফিসে চাকরি পাওয়া, অধ্যাপক জি এইচ হার্ডিকে চিঠি লেখা, এফ এ অনুত্তীর্ণ হয়েও গবেষণার জন্য মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় থেকে বৃত্তি পাওয়া, পরে ইংল্যান্ড যাওয়া প্রভৃতি ঘটনাগুলি এত রোমাঞ্চকর যে তা এক নিঃশ্বাসে পড়ে শেষ না করলে একটা অতৃপ্তি সারা মন জুড়ে অশান্তির বাতাবরণ সৃষ্টি করে।

চাকরির সন্ধান করতে করতে চাকরি পাবার আশা নিয়ে 1910 সালের গোড়ার দিকে রামানুজন তিরুকৌলুরের ডেপুটি কালেক্টর ভি রামস্বামী আয়ারের সঙ্গে দেখা করতে যান। চাকরি পাওয়ার যোগ্যতা হিসাবে তাঁর সঙ্গে আছে তাঁর গাণিতিক কাজকর্মের দলিল— নোটবই। ভি রামস্বামী আয়ার ছিলেন ইন্ডিয়ান

ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির প্রতিষ্ঠাতা। ছাত্রাবস্থা থেকেই গণিতের প্রতি তাঁর বিশেষ আগ্রহ ছিল। প্রত্যেকে তাঁকে 'অধ্যাপক' হিসাবে অভিহিত করতেন, যদিও তিনি কোনোদিন কোনো 'academic post'-এ কাজ করেন নি। তবে তিনি যখন মাদ্রাজ প্রেসিডেন্সি কলেজের ছাত্র, তখন তিনি ইংল্যান্ডের 'Educational Times'-এ একটি গাণিতিক প্রবন্ধ প্রকাশের জন্য পাঠিয়েছিলেন। তাঁকে কোনো কলেজের অধ্যাপক ভেবে তাঁকে 'অধ্যাপক' হিসাবে অভিহিত করে ইংল্যান্ড থেকে চিঠি পাঠানো হয়েছিল। সেই থেকেই তিনি অধ্যাপক ভি রামস্বামী আয়ার হিসাবে পরিচিত।

কুম্ভকোনম থেকে মাদ্রাজ আসার প্রায় মাঝপথে পন্ডিচেরির ঠিক পশ্চিমে অবস্থিত ভিল্লুপুরমে নেমে গাড়ি বদল করতে হয়। সেখানে থেকে প্রায় কুড়ি মাইল যাবার পর তিরুকৌলুর আসে। রামানুজন সেখানে পৌঁছে দেখা করলেন রামস্বামী আয়ারের সঙ্গে। এই সাক্ষাৎকারটি এক ঐতিহাসিক সাক্ষাৎকার হিসাবে চিহ্নিত। এরপর দক্ষিণ ভারতের গাণিতিক পরিমণ্ডলে রামানুজনের পরিচিতি ও যোগাযোগ বেড়ে যেতে থাকে।

অধ্যাপক রামস্বামী আয়ারের সঙ্গে দেখা করে রামানুজন তাঁকে তাঁর নোটবই দেখতে দিলেন। রামস্বামী আয়ার জ্যামিতির লোক আর নোটবইতে আছে ম্যাজিক বর্গ, মৌলিক সংখ্যা, অসীমশ্রেণী, বারনৌলি সংখ্যা, রিম্যান-জিটা অপেক্ষক ইত্যাদি নিয়ে নানা সূত্র ও উপপাদ্য। এগুলি দেখে তিনি বিস্ময়ে হতবাক। তাঁর কথায়, 'Whatever page I look into, I find it to be a mine of new theorems and formulae. What a feast !' তিনি আরো বলেছেন যে, এতে অসাধারণ সব গাণিতিক ফল দেখে তিনি উচ্ছ্বসিত। তাই তিনি তাঁর রেভিনিউ অফিসে চাকরি দিয়ে রামানুজনের গণিতপ্রতিভাকে 'শ্বাসরুদ্ধ অবস্থায় হত্যা করার পাপ' করতে চান নি। তবে তিনি রামানুজনের জন্য সুপারিশ করে মাদ্রাজের গণিতমহলের বন্ধুদের কাছে চিঠি লেখেন। তাঁদের মধ্যে একজন হলেন একদা কুম্ভকোনমের সরকারি কলেজে রামানুজনের শিক্ষক অধ্যাপক সেশু আয়ার যিনি তখন প্রেসিডেন্সি কলেজের অধ্যাপক। চার বছর পর গুরু-শিষ্যের মিলন হল।

অধ্যাপক সেশু আয়ারের চেষ্টায় মাদ্রাজ প্রেসিডেন্সির অ্যাকাউন্টেন্ট জেনারেলের অফিসে একটা অস্থায়ী চাকরি জুটল— একজন কর্মচারী ছুটিতে যাবার জন্য খালি ছিল অস্থায়ী পদটি। তাই কয়েকমাস পরে আবার সেই বেকারত্ব, আর্থিক অনটন, চাকরি সংগ্রহের মানসিক চাপ, অর্ধাহার অথবা কখনো বা অনাহার। ফলে তিনি অসুস্থ হয়ে পড়লেন। তাঁর বাড়িওয়ালাও এই অদ্ভুত, নিঃসঙ্গ ও অসুস্থ

ভাড়াটেকে নিয়ে মহা বিপদে পড়লেন। তিনি চাইলেন রামানুজন যেন কোনো বন্ধুর বাড়িতে গিয়ে থাকেন। তাই তাঁকে ঘোড়ার গাড়িতে করে বন্ধু রামকৃষ্ণ আয়ারের বাড়িতে পাঠালেন। রামকৃষ্ণ আয়ারের প্রতিবেদন থেকে জানা যায় যে, প্রথমে তিনি রামানুজনকে ডাঃ নারায়ণ স্বামীকে দেখান এবং ডাক্তারের পরামর্শে উপযুক্ত ও প্রয়োজনীয় সেবা-যত্নের জন্য রামানুজনকে কুম্ভকোনমে নিজের বাড়িতে পাঠিয়ে দেন। কিন্তু বাড়ি যাবার আগে রামানুজন তাঁকে দুটি নোটবই দিয়ে গেলেন 'সযত্নে রক্ষা'র জন্য এবং অনুরোধ করলেন যদি তাঁর মৃত্যু হয় তবে তা যেন অধ্যাপক সিঙ্গারভেলু মুদালিয়ারকে অথবা খ্রিষ্টান কলেজের অধ্যাপক এডওয়ার্ড বি রস-এর (Edward B. Ross) হাতে দিয়ে দেন।

রোগভোগ থেকে সেরে ওঠার কিছু দিন পর রামানুজন দুর্বল শরীরেই আবার মাদ্রাজ ফিরে এলেন। বন্ধু রামকৃষ্ণ আয়ারের কাছ থেকে গচ্ছিত নোটবই ফেরত নিয়ে তাকে সম্বল করে চলল আবাব চাকরির সন্ধান। কিছু অর্থ উপার্জনের জন্য চলছিল মাঝে মাঝে গৃহশিক্ষকতার কাজ। পরে 1910 সালের ডিসেম্বর মাসে অধ্যাপক সেশু আয়ারের উপদেশে তাঁর দেওয়া সুপারিশপত্র নিয়ে রামানুজন গেলেন নেরোল জেলার কালেক্টর দেওয়ান বাহাদুর উপাধি প্রাপ্ত আর রামচন্দ্র রাও-এর কাছে।

রামচন্দ্র রাও শুধু গণিত বিষয়ে আগ্রহী ছিলেন না, তিনি সত্যিকারের গণিতপ্রেমীও ছিলেন। 1907 সালে প্রতিষ্ঠিত ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির সম্পাদক পদও তিনি কিছু দিন অলঙ্কৃত করেছেন। তাছাড়া সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত গাণিতিক সমস্যার সমাধানও করেছেন কখনো কখনো। দেওয়ান বাহাদুরের সঙ্গে দেখা করার ব্যাপারে রামানুজনের বন্ধু তথা দেওয়ান বাহাদুরের ভাইপো আর কৃষ্ণ রাও যথেষ্ট সাহায্য করেছিলেন। তাছাড়া এ প্রসঙ্গে সি ভি রাজাগোপালাচারীর উৎসাহ ও সক্রিয় ভূমিকাও উল্লেখের দাবি রাখে।

নেরোলে আসার আগে মাদ্রাজে হঠাৎ সি ভি রাজাগোপালাচারীর সঙ্গে রামানুজনের দেখা হয়। রামানুজনের সাথে একই শহরে বড়ো হয়ে ওঠা তাঁর থেকে বয়সে সামান্য বড়ো রাজাগোপালাচারী তখন আইনজীবী হিসাবে প্রতিষ্ঠিত। তিনি সাহস, সঙ্গ এবং সাহায্য দিয়ে সঙ্গে করে রামানুজনকে নেরোলে নিয়ে আসেন।

অবশেষে রামচন্দ্রের রাও-এর সঙ্গে রামানুজনের দেখা হয়। এই সাক্ষাতের মুহূর্তগুলি দেওয়ান বাহাদুবের স্মৃতিতে চির উজ্জ্বল ছিল। পরে তিনি এ সম্বন্ধে

সুন্দর বর্ণনা লিখে রেখে গেছেন। ঘটনা হল, একদিন তাঁর ভাইপো কৃষ্ণ রাও, যিনি গণিত সম্বন্ধে একেবারে অনভিজ্ঞ, এসে তাঁকে একজন সাক্ষাৎপ্রার্থীর কথা বললেন। তিনি বললেন যে, সাক্ষাৎপ্রার্থীটি গণিত সম্বন্ধে কী সব কথা বলছে, যা তাঁর পক্ষে বোঝা সম্ভব নয়। এর মধ্যে সত্যিকারের কোনো সারবস্তু আছে কি না তা যদি দেওয়ান বাহাদুর খুঁজে দেখেন তবে ভালো হয় এবং তা দেখার জন্য তাঁকে অনুরোধও করেন। নিজের গণিত জ্ঞানের উপর যথেষ্ট আস্থা ও অহংকার নিয়ে দেওয়ান বাহাদুর করুণাবশত রামানুজনকে তাঁর সামনে নিয়ে আসার অনুমতি দিলেন। সাক্ষাৎকার সম্বন্ধে এ রকম বর্ণনার পর দেওয়ান বাহাদুরের লেখায় পাওয়া যায় রামানুজনের প্রবেশের বর্ণনা : 'A short uncouth figure, stout, unshaved, not overclean, with one conspicuous feature— shining eyes walked in with a frayed notebook under his arm.' তারপর তিনি রামানুজনের আসার উদ্দেশ্যে বর্ণনা করতে গিয়ে বলছেন যে, কিছু অবসর পাওয়ার খোঁজে রামানুজন কুম্ভকোনম থেকে মাদ্রাজ ছুটে এসেছেন— যাতে তিনি তাঁর গণিতসাধনা চালিয়ে যেতে পারেন। কোনো রকম সম্মান বা স্বীকৃতির প্রতি তাঁর বিন্দুমাত্র লোভ নেই। সত্যিই তিনি চেয়েছিলেন একটু নিরুদ্বিগ্ন অবসর অর্থাৎ সোজা কথায় কম পরিশ্রমে অন্নসংস্থান যাতে তিনি গণিতে নূতন নূতন সংযোজনের স্বপ্ন দেখার অবকাশ পান।

রামানুজন রামচন্দ্র রাও-এর কাছে এসে তাঁর নোটবই খুলে কিছু কিছু আবিষ্কারের ব্যাখ্যা করে বোঝাতে লাগলেন। তিনি বুঝলেন রামানুজনের কাজগুলো বাঁধাধরা গতের বাইরে এক নূতন ধরনের কাজ। এ সম্বন্ধে রামচন্দ্র রাও-এর প্রতিক্রিয়া ' ..... but my knowledge did not permit me to judge he talked sense or nonsense.'

যাই হোক, কোনো মন্তব্য না করে তিনি রামানুজনকে আবার আসতে বলেন। এই সাক্ষাৎকারের পর রামানুজন আরো দু'বার দেওয়ান বাহাদুরের কাছে আসেন। কিন্তু এ দু'বারেও তিনি রামানুজন সম্বন্ধে কোনো সিদ্ধান্ত নিতে পারেন নি। সন্দেহ ও দ্বিধা তখন তাঁর মনের উপর ক্রিয়াশীল। তিনি রামানুজনকে বললেন যে, তিনি যথা সময়েই রামানুজনের সঙ্গে যোগাযোগ করবেন। কিন্তু রামানুজন নিজেই আবার আসেন। চতুর্থবারে দেওয়ান বাহাদুর ক্রুদ্ধ। 'আবার এখানে ?' তবে এর কয়েক মিনিট পরে যখন রামানুজন রামচন্দ্র রাওকে বোম্বের প্রখ্যাত গণিতজ্ঞদের সঙ্গে তাঁর চিঠির আদান-প্রদানের মাধ্যমে তাঁর কাজের স্বকীয়তার প্রমাণ দাখিল করেন এবং নিজের একটু সহজতর গাণিতিক কাজ দেখালেন, তখন রামচন্দ্র রাও বুঝলেন

যে, রামানুজনের কাজগুলি প্রচলিত বইয়ের পরিধি ছাড়িয়ে গেছে। রামানুজন যে গণিতে অসাধারণ সে বিষয়ে আর তাঁর কোনো সন্দেহ রইল না। রামচন্দ্র রাও-এর বয়ানেই শোনা যাক : 'Then, step-by-step, he led me to elliptic integrals and hyper geometric series and at last his theory of divergent series not yet announced to the world converted me.' তখন তিনি রামানুজনকে জিজ্ঞেস করলেন যে, তিনি কী চান। উত্তরে রামানুজন বলেছিলেন তাঁর গবেষণা কাজ চালিয়ে যাবার উদ্দেশ্যে তাঁর জীবন ধারণের জন্য সামান্য অর্থের চাকরির মাস মাহিনা।

দেওয়ান বাহাদুর এবার সন্দেহমুক্ত। শুধু কি তাই ? তিনি হয়ে উঠলেন রামানুজনের একজন গুণমুগ্ধ এবং উপকারী পৃষ্ঠপোষক। তিনি উপলব্ধি করলেন যে, গণিত প্রতিভার যথাযথ স্ফুরণের জন্য রামানুজনকে নেরোলের মত ছোটো শহরে আটকে রাখা ঠিক হবে না। তাই তাঁকে সেখানে একটা কেরানির চাকরি দেওয়াকে অন্যায় কাজ হিসাবে ভেবে নিলেন। তিনি তাঁর জন্য একটি বৃত্তির ব্যবস্থা করবেন বলে প্রতিশ্রুতি দিলেন। কিন্তু চেষ্টা করে সফল হতে না পেরে, দেওয়ান বাহাদুর রামানুজনকে প্রতি মাসে পঁচিশ টাকার অনুদান পাঠাতে থাকেন। কিন্তু রামানুজন ছিলেন তীব্র আত্মসম্মানজ্ঞানসম্পন্ন। তাঁর পক্ষে কারোর ব্যক্তিগত অনুদান বেশিদিন গ্রহণ করা সম্ভব ছিল না। হলও তাই। কয়েক মাস পর তিনি এ ভাবে দান গ্রহণ করতে রাজি হলেন না।

এই সময় রামানুজন মাদ্রাজের ত্রিপলিক্যানের সামি পিল্লাই স্ট্রিটের 'সামার হাউস' বলে পরিচিত বাড়িতে বাস করতেন। অনুদান গ্রহণ করা বন্ধ করার পর রামানুজনের আর্থিক দুরবস্থার কথা চিন্তা করে অধ্যাপক সেশু আয়ার এবং রামস্বামী আয়ার দু'জনেই তাঁর সাহায্যের জন্য এগিয়ে এলেন। তখনকার মাদ্রাজ পোর্ট ট্রাস্টের ম্যানেজার এস নারায়ণ আয়ার ছিলেন দু'জনেরই বন্ধু। তিনি আবার ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির কোষাধ্যক্ষের পদও অলংকৃত করেছেন। এখন দু'জনে নারায়ণ আয়ারের সাহায্য চাইলেন। তাঁর চেষ্টায় রামানুজন করণিকের চাকরি পান— মাদ্রাজের পোর্ট ট্রাস্টে ['to the Accounts Section in III class 4th grade' (পোর্ট ট্রাস্টের অফিসের মেমো থেকে উদ্ধৃতি)]।

তাঁকে 1912 সালের 1লা মার্চ থেকে কাজে যোগ দিতে বলা হয়েছিল। এর আগে কিন্তু 1912 সালের 12ই জানুয়ারি থেকে 21শে ফেব্রুয়ারি পর্যন্ত রামানুজন অ্যাকাউন্টেন্ট জেনারেলের অফিসে কাজ করেছেন। কিন্তু এই অফিসের কাজ

তাঁর ভালো না লাগায় তিনি মাদ্রাজ পোর্ট ট্রাস্টের চিফ অ্যাকাউন্টেন্টকে চাকরির জন্য দরখাস্ত লেখেন। চিঠির সঙ্গে তিনি প্রেসিডেন্সি কলেজের অধ্যাপক ই ডব্লু মিডলমাস্টের (E.W. Middlemast) সুপারিশ পত্র দেন। এই পত্রের এক জায়গায় মিডলমাস্ট লিখেছিলেন, 'He (Ramanujan) is a young man of quite exceptional capacity in Mathematics and specially in work relating to numbers.' মজা হল তিনি দরখাস্ত করেন 9ই ফেব্রুয়ারি, নির্বাচিত হন 25শে ফেব্রুয়ারি আর যোগদান করেন 1লা মার্চ। মাইনে ছিল মাসে পঁচিশ টাকা। স্বভাবতই এই নিযুক্তির পিছনে ম্যানেজার নারায়ণ আয়ারের ভূমিকা যে ছিল, তা বলার অপেক্ষা রাখে না।

এই চাকরি তাঁকে এক পরম আত্মনির্ভরতা এনে দিল। এবারে নিজের আয়ের টাকায় নিজের পরিবারের ভরণ-পোষণ করতে পারবেন— এই ভাবনা তাঁর জন্য এক দারুণ স্বস্তির বাতাবরণ সৃষ্টি করল। উদ্বেগমুক্ত হয়ে নিরলসভাবে তাঁর গণিতসাধনাকে এগিয়ে নিয়ে যেতে পারবেন বলে তিনি এক প্রত্যয় উপলব্ধি করলেন এবং হলও তাই। মাদ্রাজ পোর্ট ট্রাস্টের চেয়ারম্যান স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং (Sir Francis Spring) ছিলেন গণিতজ্ঞ এবং গণিত বিষয়ে আগ্রহী। রামানুজন তাঁর গণিতমেধা এবং গণিতচর্চার দৌলতে স্যার ফ্রান্সিসের স্নেহধন্য হয়ে উঠলেন। রামানুজনের কাজের প্রতি তাঁর আগ্রহ, উৎসাহ, সহানুভূতি এবং প্রশ্রয় ছিল। এ প্রসঙ্গে একটা ঘটনার কথা বলা যেতে পারে।

একদিন স্যার ফ্রান্সিসের কাছে তাঁর সই নেবার জন্য একটা ফাইল এল। এই ফাইলের মধ্যে কতগুলি আলাদা কাগজে উপবৃত্তীয় সমাকলের (elliptic integral) কিছু গাণিতিক ফল লেখা ছিল। তখন তিনি খুব চটে গেছেন এমন ভান করে নারায়ণ আয়ারকে ডেকে জিজ্ঞেস করলেন যে, তিনি কি আজকাল অফিসের কাজের সময় ব্যক্তিগত কাজকর্মে ব্যস্ত থাকেন ? নারায়ণ আয়ার বিনম্রভাবে বললেন যে, তিনি কখনোই এমন কাজ করেন না। তখন স্প্রিং কাগজগুলি দেখিয়ে বললেন, 'এগুলি কী ? এই কাগজগুলি দেখুন। আপনি এই অফিসের একমাত্র ব্যক্তি যিনি এ সব ধরনের অঙ্ক করেন।'

নারায়ণ আয়ার তখন নিজের স্বপক্ষে বললেন যে, কাগজের লেখাগুলি তাঁর হাতের লেখা নয়। স্প্রিং প্রশ্ন করলেন, 'তা হলে আর কে এ সব উচ্চতর গণিতের শখের চর্চা করেন ?'

উত্তরে নারায়ণ আয়ার বললেন, 'স্যার আপনি হয়ত আমাদের অফিসে নিযুক্ত এস রামানুজনকে চেনেন। সম্ভবত এটা তাঁর কাজ।'

স্যার ফ্রান্সিস তখন মজার হাসি হেসে বললেন, 'আমি তা জানি ; আমি শুধু আপনাকে একটু খ্যাপাচ্ছিলাম।'

এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, পোর্ট ট্রাস্টে চাকরি পাবার আগে রামানুজনের গবেষণালব্ধ কিছু কাজ (গাণিতিক সমস্যা) অধ্যাপক সেশু আয়ার ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে প্রকাশের জন্য পাঠিয়েছিলেন। তা 1911 সালে ফেব্রুয়ারি মাসের সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত হয়। একই জার্নালের ডিসেম্বর মাসের সংখ্যায় 'Some Properties of Bernoulli's numbers' শিরোনামের রামানুজনের প্রবন্ধ প্রকাশিত হয়। এটি রামানুজনের প্রথম প্রকাশিত গবেষণা পত্র। 15 পৃষ্ঠাব্যাপী এই প্রবন্ধে বারনৌলি সংখ্যার পাটিগাণিতিক ধর্মাবলী সম্বলিত আটটি উপপাদ্য ছিল— যার মধ্যে তিনটির প্রমাণ দেওয়া হয়েছিল, দুটিকে অন্য দুটির অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে দেওয়া ছিল আর বাকি তিনটি উপপাদ্যের বর্ণনা করা হয়েছিল 'কেবলমাত্র অনুমান' হিসাবে।

কিন্তু এই প্রবন্ধে রামানুজনের পদ্ধতি ছিল 'so trace and novel and his presentation was so lacking in clearness and precision' যে সাধারণ পাঠকের পক্ষে তা বোঝা মুশকিল। বুদ্ধির এমন প্রকাশনার সঙ্গে একদম পরিচিত ছিলেন না তাঁরা। ফলে এ লেখাকে অনুসরণ করাও তাঁদের পক্ষে কষ্টকর ছিল।

রামানুজনের এই প্রথম প্রবন্ধ সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে জার্নালের গোড়ার দিকের সম্পাদক এম টি নারায়ণ আয়েঙ্গার বলেছেন, 'রামানুজন অনেক জিনিসই স্বজ্ঞাবলে (intuitively) চাক্ষুষ করতেন কিন্তু তাদের ব্যাখ্যা দিতে পারতেন না। আর প্রথম প্রবন্ধটি পরিমার্জনের জন্য তাঁর কাছে পাঠানো হয়েছে— অন্তত তিন বারের কম নয়।'

1912 সালে ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে আরো দুটি লেখা এবং সমাধানের জন্য কিছু প্রশ্নও প্রকাশিত হয়। লেখা দুটি হল 'On Question 330 of Prof. Sanjana' এবং 'Note of a set of simultaneous equations.' উল্লেখ করা যায় যে, সংক্ষিপ্ত জীবনে এই জার্নালে রামানুজনের পাঠানো প্রশ্ন বা পাঠানো গাণিতিক সমস্যার সমাধানের মোট সংখ্যা হল ঊনষাটটি।

রামানুজন যখন পোর্ট ট্রাস্টে চাকরি পান তখন ত্রিপলিকানের সামার হাউসের বাসস্থান থেকে তাঁর কর্মস্থল ছিল প্রায় তিন মাইল দূরে। তাই চাকরি পাবার কয়েক মাস পরে তিনি তাঁর অফিসের কাছাকাছি জর্জ টাউনের শৈব মুদালি স্ট্রিটে চলে

আসেন। এখানে তিনি তাঁর দিদিমা রঙ্গম্মল, মা কোমলতাম্মল ও স্ত্রী জানকীকে নিয়ে আসেন। বিয়ের প্রায় তিন বছর পর তিনি ও জানকী দেবী একই বাড়িতে থাকার সুযোগ পান। চাকরি পাবার পর অর্থের কিছুটা সংস্থান হলেও চারজনের সংসার চালানোর জন্য প্রয়োজনীয় অর্থ জুটত না। তাই অফিসের কাজের পর গৃহশিক্ষকের কাজ করে কিছুটা বাড়তি আয়ের চেষ্টা করতেন। কিন্তু যাই করুন না কেন, গণিতই ছিল রামানুজনের সারাক্ষণের সঙ্গী। পরবর্তী সময়ে জানকী দেবীর রামানুজনের গণিতচর্চা প্রসঙ্গে বলতে গিয়ে বলেছেন যে, অঙ্ক কষতে কষতে তিনি হয়তো একদিন সারারাত জেগে সকাল ছটার সময় বিরতি দিলেন। তারপর দু' তিন ঘণ্টা ঘুমিয়ে কাজের জন্য রওয়ানা হলেন।

রামানুজনের আর্থিক অস্বচ্ছলতার কথা এবং সে সম্বন্ধে তাঁর দ্বিধাহীনতার কথা বোঝা যাবে একটা ঘটনা থেকে। একদিন তাঁর এক বন্ধু মাদ্রাজ বন্দরে বেড়াতে বেড়াতে দেখলেন রামানুজন প্যাকিং কাগজের মোড়ক সংগ্রহ করছেন। বন্ধুটি কারণ জিজ্ঞাসা করায় তিনি অকপটে বললেন যে, তাঁর গণিতচর্চার জন্য যতটা কাগজ প্রয়োজন, তা কেনা তাঁর ক্ষমতার বাইরে। তাই তিনি এগুলো সংগ্রহ করছেন।

তবে একটা বিষয় এখানে বলা প্রয়োজন যে, আর্থিক দুরবস্থা অথবা প্রতিকূল পরিস্থিতিতে রামানুজন ছিলেন প্রশান্ত ও অচঞ্চল। নানা ঘটনা থেকে এটা আমাদের সামনে স্পষ্ট হয়ে ওঠে যে তিনি ছিলেন কষ্টসহিষ্ণু এবং অসাধারণ ধৈর্যের অধিকারী।

যখন ত্রিপলিক্যানের সামি পিল্লাই স্ট্রিটে রামানুজন বসবাস করতেন সেই সময় একদিন রাতের বেলায় রাস্তায় দাঁড়িয়ে এক বন্ধুকে তারামণ্ডলের নানা রহস্য ও কাণ্ড কারখানার কথা বোঝাচ্ছিলেন। তিনি বিষয়টিতে তন্ময় হয়ে জোরে জোরেই কথা বলছিলেন। তাঁর বকবকানিতে বিরক্ত হয়ে তাঁকে চুপ করানোর উদ্দেশ্য নিয়ে উপর থেকে একজন তাঁর মাথায় জল ঢেলে দিলেন। রামানুজন কিন্তু এতে একদম চটে গেলেন না। বরং হাসতে হাসতে বললেন, 'ঈশ্বরকে ধন্যবাদ, আমার গঙ্গা স্নান হয়ে গেল। ভবিষ্যতে আরো হলে খুশি হব।' এ প্রসঙ্গে রামানুজনের এক জীবনীকার সুরেশ রামের মন্তব্য,'This reminds one of the celebrated wizard, Sir Isacc Newton, who uttered not a word of anger at his maid servant having swept off his mathematical papers.'

পোর্ট ট্রাস্টের অফিসের কাজে যোগ দেবার পর রামানুজনের গণিতসাধনা যেন বেগবান হল। শান্ত ও ধীর চিত্তে এবং একান্তভাবে উৎসর্গীকৃত মন নিয়ে

রামানুজন তাঁর গবেষণা চালিয়ে যেতে লাগলেন। তিনি এর মধ্যে পেয়ে গেছেন চেয়ারম্যান স্যার ফ্রান্সিসের স্নেহ ও আনুকূল্য। ম্যানেজার নারায়ণ আয়ার তাঁর সহকর্মী বা উপরওয়ালা নন, তিনি এখন রামানুজনের 'adviser, mentor and freind'। রামানুজন ও নারায়ণ আয়ারের সম্পর্ক সম্বন্ধে এ ধরনের মন্তব্যের সারবত্তা নারায়ণ আয়ারের ছেলের প্রতিবেদন থেকে জানা যেতে পারে। প্রতিবেদন থেকে জানা যায় যে, নারায়ণ আয়ার তাঁর ত্রিপলিক্যানের পাইক্রফট রোডের বাড়িতে প্রতিদিন রামানুজনের সঙ্গে উপরের তলায় বসে গণিত চর্চা করতেন। দু'জনের কাছে থাকত বড়ো স্লেট। প্রায় রাত সাড়ে এগারোটা পর্যন্ত স্লেট ও পেনসিলের আওয়াজ শোনা যেত। পাশের ঘর থেকে অনেক সময় সবাই যখন ঘুমে অচেতন তখন প্রায় রাত দু'টোর সময় হয়তো রামানুজন ঘুম থেকে উঠে হারিকেনের মৃদু আলোতে কী কী সব লিখে রাখতেন। যদি নারায়ণ আয়ার জিজ্ঞেস করতেন কী সব লিখছেন, সে সম্বন্ধে তিনি যা বলতেন তা নারায়ণ আয়ারের ছেলে এন শুভনারায়াণের কথায় জানা যাক, 'তিনি (রামানুজন) বলতেন যে— তিনি স্বপ্নে গণিতিক সমস্যার সমাধান করেছেন এবং এখন তিনি ফলগুলি লিখে রাখছেন, যাতে সেগুলোকে পরে মনে রাখতে পারেন।'

মজা হল, রামানুজনের লেখা এই সব গাণিতিক ফল নারায়ণ আয়ার তাঁর কাছে একটু বিস্তৃতভাবে এবং প্রাঞ্জলভাবে জানতে চাইতেন। কারণ, রামানুজনের লেখা একটি ধাপ এবং তার পরের ধাপের মধ্যে বিস্তর ফারাক ও ফাঁক ছিল যা অন্যের পক্ষে অনুধাবন করা খুবই কঠিন। শুভনারায়ণ লিখছেন, "My father, being a fairly good mathematician himself, was unable to capture the strides of Ramanujan's discoveries. He used to tell him. 'When I am not able to understand your steps, I do not know how other mathematicians of a critical nature will accept your genius. You must descend to my level and write at least 10 steps between two steps of yours'." রামানুজনের উত্তর হত, এটা যখন তাঁর কাছে এত সহজ ও স্পষ্ট, তখন তিনি কেন বেশি ধাপ লিখবেন। কিন্তু নারায়ণ আয়ার চান আরো কিছু বেশি ধাপ। তাই তিনি নানা স্তোকবাক্যে রামানুজনকে ভুলিয়ে আরো কিছু বেশি ধাপ লিখিয়ে নিতেন।

নারায়ণ আয়ার সম্বন্ধে জানকী দেবীর যথেষ্ট শ্রদ্ধা ছিল। তিনি বলেছেন, অনেকে রামানুজনকে সাধারণের মতো বিবেচনা করলেও নারায়ণ আয়ারের মতো লোকেরা তাঁকে হীরা হিসাবেই চিহ্নিত করেছিলেন এবং স্যার ফ্রান্সিসকে রামানুজন

সম্বন্ধে সহমত পোষণ করাতে পেরেছিলেন। রামানুজনের সম্বন্ধে স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং-এর এই মনোভাব কিন্তু তখনকার সামাজিক প্রেক্ষাপটে কম গুরুত্বপূর্ণ ব্যাপার নয়। রামানুজনের জীবনীকার ক্যানিগেলের কথায়, 'And it was in coming to the attention of Sir Francis and to the web of contacts radiating out from him that. sometimes around the middle of 1912. Ramanujan stepped into British India. He had grown up and lived almost his entire life with only the barest contact with the British. Now that was about to change'। তিনি এখন বহু ইংরেজের পরিচিতি এবং সান্নিধ্যে আসতে শুরু করলেন।

জি. এইচ. হার্ডি (এফ. আর. এস. হবার আগে)

ঐতিহাসিক চিঠি ও বিদেশ যাত্রায়

রামানুজন যখন পোর্ট ট্রাস্টে চাকরি পান তখন ইংরেজদের সঙ্গে রামানুজনের চেনা ছিল একদম কম। কিন্তু পোর্ট ট্রাস্টে ঢোকার পর অবস্থা যেন দ্রুত পালটাতে লাগল। তাঁর বন্ধু নরসিংহ মাদ্রাজের খ্রিষ্টান কলেজের ই বি রসের সঙ্গে রামানুজনের আগে পরিচয় করিয়ে দিয়েছিলেন। তিনি প্রেসিডেন্সি কলেজের ই ডব্লু মিডল্‌মাস্টের সঙ্গে পূর্বেই সাক্ষাৎ করেছেন। এখন পোর্ট ট্রাস্টে স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং তাঁকে চিনলেন। এবারে ফ্রান্সিসের বন্ধু-বান্ধবদের সঙ্গে পরিচিত হবার বাতাবরণ প্রস্তুত এবং রামানুজনের স্বীকৃতি ও সাফল্যের জন্য এই পরিচিতির একান্ত প্রয়োজন। কারণ ভারতবর্ষে তখন চলছে বৃটিশ রাজত্ব। কোনো ব্যক্তি যদি ইংরেজদের নেক নজরে না আসেন অথবা তাঁর প্রতিভা বা দক্ষতার সম্বন্ধে যদি ইংরেজদের স্বীকৃতি না পাওয়া যায়, তা হলে ব্যক্তিটির উন্নতির পথে নানা প্রতিবন্ধকতা সৃষ্টি হতে পারে। তাঁর প্রস্ফুটনের ধারা স্তব্ধ হবার আশঙ্কাও থাকে। এই সামাজিক ও রাজনৈতিক পটভূমিতে রামানুজনের সঙ্গে ইংরেজদের যোগাযোগের গুরুত্বকে বিচার করতে হবে। আর ইংরেজদের সঙ্গে যোগাযোগের সূত্র রামানুজনের জীবনের পরবর্তী পর্যায়গুলি কীভাবে এবং কতটা প্রভাবিত হয়েছে— তা আমাদের নিবিড় ভাবে জানতে হবে। তা না হলে আমরা রামানুজনেরর সাফল্য, উত্থান ও তিরোধানকে সঠিক আলোকে বিচার করতে পারব না।

সেশু আয়ার, নারায়ণ আয়ার, রামচন্দ্র রাও, মিড্‌লমাস্ট এবং অন্যান্যদের গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকায় পোর্ট ট্রাস্টে রামানুজনের চাকরি লাভের পর গণিতে তাঁর সহজাত দক্ষতার কথা অনেকের কাছেই পৌঁছে গেছে। স্যার ফ্রান্সিস রামানুজনের গণিত গবেষণা কথাও জেনে গেছেন ; কিন্তু গণিতে তাঁর প্রতিভার গভীরতা বা অসাধারণত্বের পরিমাণ সম্বন্ধে তিনি নিশ্চিন্ত নন। তাই তিনি মাদ্রাজের ডিরেক্টর অফ পাবলিক ইন্‌স্ট্রাকশান এ জি বোর্নে-এর (A.G. Bourne) কাছে উপদেশ চান— কী ভাবে রামানুজনের প্রতিভার ব্যাপ্তি যাচাই হবে। এ কাজের জন্য বোর্নে মাদ্রাজের দু'জন গণিতজ্ঞের নাম করেন এবং তাঁদের কাছে পাঠাতে বলেন। এদের মধ্যে একজন হলেন মাদ্রাজের অ্যাকাউন্টেন্ট জেনারেল ডব্লু গ্রাহাম (W. Graham) যিনি স্পষ্ট করে কোনো মতামত দিলেন না। মন্তব্য করলেন, 'Giving me impression of having brains.'

এর আগেই দেওয়ান বাহাদুরের অনুরোধে রামানুজনের গাণিতিক কাজের

মূল্যায়নের জন্য মাদ্রাজ ইঞ্জিনিয়ারিং কলেজের অধ্যাপক সি এল টি গ্রিফিথ তাঁর এক সময়ের শিক্ষক লন্ডনের অধ্যাপক এম জে এম হিলের (M.J.M.Hill) শরণাপন্ন হয়েছেন। তিনি লিখলেন, 'If there is any real genius in him, he will have to be provided with money for books and with leisure, but until I hear from home, I do'nt feel sure that it is worthwhile spending much time or money.'

এখন গ্রাহামের মতামত পেয়ে গ্রিফিথ তা স্যার ফ্রান্সিসকে জানিয়ে এই পরামর্শ দিলেন যে, তাঁদের হিলের মতামতের জন্য অপেক্ষা করা উচিত। 1912 সালের 3রা ডিসেম্বর এবং 7ই ডিসেম্বরের লেখা হিলের দুটি চিঠি গ্রিফিথের কাছে পৌছোল। তাতে তিনি রামানুজনকে কিছু উপদেশ দিয়েছেন, ব্রোমউইচের লেখা 'Theory of Infinite Series' বইটি ভালো করে পড়তে বলেছেন ; কিন্তু রামানুজনের মধ্যে অসাধারণ কিছু ক্ষমতা আছে কিনা অথবা তিনি আদৌ প্রতিভাধর হলে তাঁর প্রতিভার ধরন ও গভীরতা কোন্ পর্যায়ের— এ সব প্রশ্নের উত্তর হিল তাঁর চিঠিতে দেন নি।

এই প্রসঙ্গে হিলের কাছে পাঠানো রামানুজনের গাণিতিক ফল এবং সে সম্বন্ধে দু'চার কথা বলা যেতে পারে। এই গাণিতিক ফলগুলির মধ্যে রামানুজনের সাংঘাতিক (outrageous ?) দাবি ছিল

$$1+2+3+4+ \ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{12} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+ \ldots\ldots\ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+ \ldots\ldots = \frac{1}{240} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

এগুলি সম্বন্ধে হিলের ধারণা, 'Ramanujan had bugled'.কারণ গণিতজ্ঞ আবেলের সঙ্গে হিল একমত যে 'Divergent series are, in general, deadly.' তাছাড়া আমরা জানি, $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$; $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ এবং $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$; অতএব (1), (2), (3) তিনটি অসীম শ্রেণী হচ্ছে অপসারী (divergent).

এ প্রসঙ্গে পরবর্তী কালে ব্রুস সি বার্ন্ট (Bruce C. Berndt) এবং রবার্ট এ র‍্যানকিন (Robert A.Rankin) 'Ramanujan : Letters and Commentary' গ্রন্থে যে ব্যাখ্যা দিয়েছেন (পৃষ্ঠা 17), তা উল্লেখের দাবি রাখে। রিম্যান-জিটা অপেক্ষক

(Riemann-Zeta function) নিচের মতো সংজ্ঞায়িত হয় :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \;..... (4),\ \text{Re } s>1.$$

'Analytic continuation' ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12},$$

যাকে রামানুজন (1) নং সম্পর্কে লিখেছেন।

অনুরূপভাবে পাওয়া যাবে $\zeta(-2) = 0,\qquad \zeta(-3) = \frac{1}{240}$

আসলে অসুবিধা হল, রামানুজন কিন্তু এভাবে তাঁর দাবি উপস্থিত করেন নি। শুধু তাই নয়, তিনি তাঁর কাজের কোনো প্রকার ব্যাখ্যাও দেন নি। এখন জানা গেছে যে, রামানুজন তাঁর অসীম শ্রেণীর তত্ত্বে প্রতিটি শ্রেণীর (তা অভিসারী বা অপসারী হোক না কেন) সঙ্গে সব সময় একটি ধ্রুবক জুড়ে দিতেন। (1). (2), (3)-এ বর্ণিত অসীম শ্রেণীগুলিতে তিনি যথাক্রমে $-\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{240}$ এই তিনটি ধ্রুবক যুক্ত করেছিলেন।

হিলের চিঠি আসার পর মোটামুটি এ সিদ্ধান্তে আসা গেল যে ভারতবর্ষে রামানুজনের কাজকে কেউ ঠিক অনুধাবন করতে পারবে না অথবা তাঁর পক্ষে এখানে প্রয়োজনীয় উৎসাহ, যথাযথ পরামর্শ ও দক্ষ সমজদার পাওয়া যাবে না। তাই শুভানুধ্যায়ীরা রামানুজনকে সঠিক সাহায্য ও উপযোগী পরামর্শের জন্য কেমব্রিজ বা পাশ্চাত্যে চিঠি লেখার জন্য উপদেশ দেন।

অবশেষে 1912 সালের শেষপর্বে এবং 1913 সালের গোড়ার দিকে তিনি তখনকার বিশিষ্ট গণিতজ্ঞদের সঙ্গে যোগাযোগ করার চেষ্টা করেন। এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, রামানুজন যে সব চিঠি লিখতেন তার ইংরাজি বয়ান ঠিক করার জন্য নারায়ণ আয়ার ও সেশু আয়ার সাহায্য করতেন। তিনি চিঠির সঙ্গে তাঁর কাজের নমুনাও জুড়ে দিতেন।

লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির প্রাক্তন সভাপতি, এফ আর এস এবং গণিতজ্ঞ হিসাবে উচ্চ আসনে আসীন অধ্যাপক ডব্লু এফ বেকার-এর (W.F.Baker) কাছ থেকে সাহায্য ও পরামর্শ চেয়ে রামানুজন চিঠি লিখলেন। কিন্তু কোনো উত্তর রামানুজন পেলেন না।

এরপর তিনি লিখলেন আর এক প্রখ্যাত গণিতজ্ঞ এবং এফ আর এস তথা

কেমব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয়ের বিশুদ্ধ গণিতের সালদেরিয়ান (Salderian) চেয়ারের অধিকারী অধ্যাপক ই ডব্লু হবসনকে (E.W.Hobson)। এ বারেও রামানুজন কোনো রকম সাড়া পেলেন না।

পরিশেষে রামানুজন চিঠি লেখেন কেমব্রিজের আর এক গণিতজ্ঞকে— যিনি আগের দু'জনের পরবর্তী প্রজন্মের চিন্তাধারায় প্রভাবিত বলে বিবেচিত হয়ে থাকেন। তিনি হলেন জি এইচ হার্ডি— পুরো নাম গড্‌ফ্রে হ্যারোল্ড হার্ডি (Godfrey Harold Hardy)। তিনি ট্রিনিটি কলেজের ফেলো, মাত্র ছত্রিশ বছর বয়সে পদার্পণ করেও বিশ্ববিখ্যাত গণিতজ্ঞ, এফ আর এস এবং কেমব্রিজ বিশ্ববি দ্যালয়ের গণিতের কেলি অধ্যাপক। তাঁর জন্ম 1877 সালের 7ই ফেব্রুয়ারি, বছরের হিসাবে রামানুজনের চেয়ে দশ বছরের বড়ো। হার্ডিকে লেখা রামানুজনের এ চিঠিটি ছিল এগারো পাতার এবং লেখার তারিখ ছিল 1913 সালের 16ই জানুয়ারি— যা ছিল মকরসংক্রান্তি। দিনটি ভারতীয়দের কাছে, বিশেষ করে দক্ষিণ ভারতীয়দের কাছে এক পুণ্য তিথি।

এই চিঠি লেখার একটা ছোটো পটভূমি আছে। একদিন রামানুজন মৌলিক সংখ্যা সংক্রান্ত তাঁর গবেষণার কাজ নিয়ে অধ্যাপক সেশু আয়ারের সঙ্গে দেখা করলেন। তখন তিনি রামানুজনকে অধ্যাপক হার্ডির লেখা 'Cambridge Tracts in Mathematics' -এ প্রকাশিত 'Order of infinity' প্রবন্ধটিকে পড়ার উপদেশ দেন। রামানুজন এর 36 পৃষ্ঠায় দেখলেন, 'The exact order of $\rho(x)$ [defined by the equation : $\rho(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ where $\pi(x)$ denotes the numbers of primes less than x] has not yet been determined.' এ লেখা দেখে রামানুজন সেশু আয়ারকে বললেন যে, তিনি এমন একটি সূত্র আবিষ্কার করেছেন যা 'order of $\rho(x)$' -কে নির্দেশ করবে। তখন সেশু আয়ার তাঁকে এ সম্বন্ধে আবিষ্কৃত তাঁর ফল এবং অন্যান্য সব গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার হার্ডির কাছে পাঠাতে উপদেশ দেন। এই উপদেশ অনুসারে রামানুজন হার্ডিকে এই চিঠিটি লেখেন। এই চিঠিটি গণিত-ইতিহাসের এক অমূল্য সম্পদ হিসাবে চিহ্নিত হয়ে আছে। যথার্থই 'This letter is one of the most important and exciting mathematical letters ever written.' [এই চিঠি এবং অন্যান্য কিছু গুরুত্বপূর্ণ চিঠির বয়ান পরিশিষ্টতে সংযোজিত হয়েছে]।

চিঠিটির শুরু নিজের পরিচয় দিয়ে এভাবে— 'I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras ....'

চিঠিটির সঙ্গে রামানুজন পাঠালেন তাঁর গবেষণালব্ধ অনেক সূত্র ও উপপাদ্য যাদের পরবর্তী কালে অনেকে 'a collection of amazing results' হিসাবে অভিহিত করেছেন।

চিঠিটি অধ্যাপক হার্ডির কাছে পৌঁছোল 1913 সালের জানুয়ারি মাসের কোনো এক হিমেল সকালে। প্রাতরাশ টেবিলে অন্যান্য চিঠিগুলোর মধ্যে হার্ডি এই চিঠিটি পেলেন— 'a large untidy envelop decorated with Indian stamps'। চিঠিটি পেয়ে তিনি মোটেই উৎসাহবোধ করলেন না। চিঠিটির মধ্যে তিনি এমন সব গাণিতিক ফল (সূত্র বা উপপাদ্য) পেলেন যার বেশির ভাগ 'wild or fantastic looking'; দু' একটি আগের অতি পরিচিত সূত্র আর বাকিগুলি 'laid out as they were original'। কিন্তু এ সবের জন্য কোনো প্রমাণের উল্লেখ নেই। হার্ডির কাছে কেমন একঘেয়ে লাগল ; তিনি বিরক্ত হলেন। মনে হল 'a curious kind of fraud'। তিনি এগুলো একপাশে সরিয়ে রেখে তাঁর প্রাত্যহিক রুটিন অনুসারে কাজ করতে লাগলেন। প্রাত্যহিক রুটিন বলতে যা বোঝায় তা হল— প্রথমে তিনি খবরের কাগজে ক্রিকেটের খবর থাকলে তা গভীর মনোযোগ সহকারে পড়বেন। তারপর সেদিন কোনো ক্লাশ বা বক্তৃতা থাকলে তার জন্য প্রস্তুতি নেবেন। আর তা না থাকলে নিজস্ব গণিতচর্চার কাজে ব্যস্ত থাকবেন, তবে তাঁর কাছে গণিতের সৃষ্টিশীল কাজের সময়সীমা দিনে চারঘণ্টা। দুপুরে হালকা লাঞ্চ। তারপর বিকেল বেলায় বিশ্ববিদ্যালয়ের মাঠে টেনিস খেলা বা ক্রিকেট ম্যাচ থাকলে তা দেখতে যাওয়া। পরে সন্ধে বেলায় ঘরে ফেরা। সেদিনও তাঁর এই রুটিনের কোনো পরিবর্তন হয়নি সত্যি, কিন্তু ভিতরে ভিতরে অনুভব করছিলেন যে কাজগুলো যেন ঠিকমতো হচ্ছে না। কেমন যেন আনমনা ছিলেন, মনটা যেন অন্য কোনোখানে। বার বার চোখের সামনে ভেসে উঠছিল ভারতীয় করণিকের পাঠানো 'বন্য' উপপাদ্যগুলো। লোকটির সম্বন্ধে নানা ভাবনা, নানা জিজ্ঞাসা তাঁকে মাঝে মাঝেই উতলা করে তুলছিল। প্রশ্ন যেন তাড়া করছিল 'Is a fraud of genius more probable than an unknown mathematician of genius ?' যদিও এই প্রশ্নের উত্তর পরবর্তী কালে দৃঢ় ও নিশ্চিতভাবে স্থিরীকৃত হয়েছিল, কিন্তু সেই মুহূর্তের দ্বিধা ও দোদুল্যমানতা হার্ডিকে যেন স্বস্তি দিচ্ছিল না।

তিনি রামানুজনের চিঠিটাকে কিছুক্ষণের জন্য মনের কাছ থেকে দূরে সরিয়ে রাখতে পেরেছিলেন সত্যি, কিন্তু বেকার বা হবসনের মতো একদম সরাতে পারেন নি। রামানুজনের সঙ্গে তাঁর আত্মিক যোগাযোগের ভবিতব্য যেন তাঁকে অলক্ষে ও

অজান্তে চিঠিটির দিকে আকর্ষিত করছিল, নাকি তাঁর নিজস্ব চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য তাঁকে চিঠিটির প্রতি দৃষ্টি দিতে বাধ্য করছিল। হার্ডি ছিলেন অন্য ধাতের, অন্য জাতের গণিতজ্ঞ— পরীক্ষা ছাড়া কোনো কিছুকে মেনে নেওয়া বা অবহেলা করা ছিল তাঁর চরিত্র বিরোধী কাজ। সেদিন সন্ধেয় ঘরে ফিরে হার্ডি রামানুজনের পাঠানো উপপাদ্যগুলি আবার দেখলেন। সহকর্মী ও বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ জে ই লিটলউডকে (J.E. Littlewood) তিনি তাঁর ঘরে ডেকে পাঠালেন উপপাদ্যগুলি দেখাবার জন্য। হার্ডি ও লিটলউডের মধ্যে পারস্পরিক শ্রদ্ধা, সহমর্মিতা ও যৌথ কাজ করার উদাহরণকে সবাই সম্মানের সঙ্গে দেখে— এটা বোধহয় এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন। যাই হোক, লিটলউড এলেন হার্ডির ঘরে।

সেদিন রাত ন'টার সময় হার্ডির ঘরের দৃশ্য এমন উজ্জ্বল ছিল যে একটু চেষ্টা করলেই তা চোখে ভেসে উঠবে। দু'জনের সামনে রামানুজনের পাঠানো লেখাগুলি ছড়ানো। দুজনে উপপাদ্যগুলির বিচার-বিশ্লেষণে ব্যস্ত ; হাতিয়ার হচ্ছে হার্ডির অম্রিয়মাণ স্বচ্ছতা, বুদ্ধির প্রখরতা ও তীব্র বিশ্লেষণ ক্ষমতা আর লিটলউডের প্রখর কল্পনাশক্তি, উচ্চ গাণিতিক ক্ষমতা ও সদা প্রফুল্লতা। তাঁরা উপপাদ্যগুলি যত দেখছেন, ততই বিমোহিত হচ্ছেন। সত্যি 'The more they looked, the more dazzled they became'। তাঁদের সিদ্ধান্ত নিতে দেরি হল না। এ সম্বন্ধে সি পি স্নো-এর (C.P. Snow) মুখে শোনা যাক, 'Before mid-night they knew and knew for certain. The writer of the manuscripts was a man of genius.'

হার্ডি ভীষণভাবে আলোড়িত। শিহরিত তাঁর গণিত অনুভূতি। সারা কেমব্রিজে খবর ছড়িয়ে পড়ল, সবাই যেন জেনে ফেলল, 'at least another Jacobi in making had been found out.' এই প্রসঙ্গে ক্যানিগেলের বর্ণনা অপরূপ, 'Now, something wildly new and alien had presented itself to him (Hardy) in the form of a long, mathematics-dense letter from India. Once again, he opened his heart and mind to it.'।

সেই সময় এই ঘটনা যে কী পরিমাণ সাড়া জাগিয়েছিল তার কিছুটা হদিশ পাওয়া যাবে লেডি ওটোলিন মোরেলকে (Lady Ottoline Morell) লেখা বার্ট্রান্ড রাসেল-এর (Bertrand Russell) চিঠি থেকে। তিনি লিখেছিলেন, 'I found Hardy and Littlewood in a state of wild excitement, because they believe, they have discovered a second Newton, a Hindu clerk in Madras at £ 20 a year. He wrote to Hardy telling of some results he has got, which Hardy thinks quite wonderful.'

সত্যি, চিঠিটি যেন গণিত-ইতিহাসের এক সুদূর প্রসারী দিক্ নির্দেশনা। কেমব্রিজের সারা বিদগ্ধ সমাজকে এই চিঠিটি নাড়িয়ে দিয়েছে, করেছে উদ্বেলিত। এ ব্যাপারে পরবর্তীকালে নেভিলের স্মৃতিচারণাও উল্লেখের দাবি রাখে। তিনি বলেছেন, 'সেই সময়কার কেমব্রিজের গণিত-পরিমণ্ডলের সঙ্গে যুক্ত এমন কেউই ছিলেন না, যিনি এই চিঠি যে ধরনের উত্তেজনা সৃষ্টি করেছিল, তা ভুলে যেতে পারেন। একজন অখ্যাত ভারতীয় কেরানি উপদেশ পাবার জন্য আবেদন করছেন, যেহেতু তিনি অনভিজ্ঞ ; তাঁর উপপাদ্য প্রকাশের জন্য সাহায্য চাইছেন, কারণ তিনি গরিব'। তবে এই সহায়তা চেয়েই রামানুজন বলেছেন, 'But only, if you are convinced that there is anything of value.'

এখন দেখা যেতে পারে চিঠিতে পাঠানো সূত্র বা উপপাদ্য বা গাণিতিক ফলগুলি কী ধরনের বা কেমন ধারার ছিল ? এদের মধ্যে ছিল একটি সংখ্যা পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য কিছু অসীম শ্রেণী ও কিছু সমাকল, সে সম্বন্ধে কিছু পাটিগাণিতিক অপেক্ষক, বিটা ও গামা অপেক্ষকের জন্য নানা অভেদ যা উপবৃত্তীয় ও থিটা অপেক্ষক তত্ত্বের সঙ্গে জড়িত, কিছু বারনৌলি সংখ্যা সংক্রান্ত উপপাদ্য, ক্রমিক ভগ্নাংশ সম্পর্কিত কিছু অভেদ ইত্যাদি। এই গাণিতিক ফলগুলির মধ্যে ছিল বেশ কিছু পরিচিত উপপাদ্য আবার কিছু কিছু ভুল অনুমানও। তবে এদের মধ্যে এমন অনেক সূত্র বা উপপাদ্য ছিল যা 'startlingly new and very deep'। কিন্তু যার অভাব ছিল তা হল এদের ব্যাখ্যা বা প্রমাণের উল্লেখ। এই উপপাদ্যগুলি সম্বন্ধে বলতে গিয়ে পরবর্তী কালে নেভিল মন্তব্য করেছিলেন, 'of these theorems, sent without demonstration, by this clerk of whom we had never heard, no one could have been set in the most advanced mathematical examinations in the world.'

হার্ডি রামানুজনের এই চিঠিকে 'certainly the most remarkable I have ever received' হিসাবে আখ্যায়িত করেছেন আর এর লেখক সম্বন্ধে যে অতি উঁচু ধারণা পোষণ করেছেন, তা বলার অপেক্ষা রাখে না। চিঠির উপপাদ্য ও লেখক সম্বন্ধে নিজের বিচার করা এবং স্বচ্ছ মতামত গঠন করার পর হার্ডি লেগে গেলেন নিজের কাজে। তিনি রামানুজনের প্রতিভার যথার্থ বিকাশের জন্য ইংল্যান্ডে নিয়ে আসার সিদ্ধান্ত নিলেন। টাকা কোনো সমস্যা নয়, কারণ ট্রিনিটি 'unorthodox talent' কে সাহায্য করার ব্যাপারে সবসময় আগ্রহী। হার্ডি পরের দিনই লন্ডনে অবস্থিত 'ভারতীয় অফিস'কে রামানুজন সম্বন্ধে তাঁর আগ্রহ এবং কেমব্রিজে তাঁকে নিয়ে আসার নিজস্ব ইচ্ছার কথা জানিয়ে দিলেন।

হার্ডিকে চিঠি পাঠানোর পর তাঁর উত্তর পাবার অপেক্ষা রামানুজনকে বেশি দিন করতে হয়নি। আগের দু'বারের মতো বিফল মনোরথ নিয়ে তাঁকে সময় কাটাতে হয় নি। 1913 সালের নিজের জন্মদিনের পরের দিন 8ই ফেব্রুয়ারি হার্ডি রামানুজনকে চিঠি লিখলেন, প্রেরকের ঠিকানায় লেখা ছিল ট্রিনিটি কলেজ, কেমব্রিজ। হার্ডির চিঠিকে আমরা পাশ্চাত্যের গণিতজ্ঞদের দ্বারা রামানুজনের প্রতিভার সত্যিকারের স্বীকৃতির প্রথম ধাপ হিসাবে চিহ্নিত করতে পারি। 'Dear Sir' বলে সম্বোধন করে হার্ডি লিখছেন, 'I was exceedingly intersted by your letter and by the theorems you state'। তারপর তিনি রামানুজনের পাঠানো উপপাদ্যগুলিকে তিন প্রকারে ভাগ করে তাদের সম্বন্ধে মন্তব্য করেছেন। এদের কতগুলিকে তিনি অতি পরিচিত, কতগুলিকে নূতন ও আকর্ষণীয় এবং কতগুলিকে নূতন ও গুরুত্বপূর্ণ হিসাবে বলেছেন। তবে তিনি রামানুজনকে উপপাদ্যগুলির প্রমাণ সরবরাহ করার কথা গুরুত্বের সঙ্গে লিখেছেন এই বলে, 'You will understand that, in this theory everything depends on rigorous exactitude of proof.'

হার্ডির কাছ থেকে উত্তর পাবার পর রামানুজন হার্ডিকে দ্বিতীয় চিঠি লেখেন 1913 সালের 27শে ফেব্রুয়ারি। দশ পাতার দীর্ঘ এই চিঠিতে তিনি আরও কিছু উপপাদ্য পাঠান। এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে, প্রথম ও দ্বিতীয় চিঠিতে রামানুজনের পাঠানো উপপাদ্যের সংখ্যা প্রায় একশো কুড়িটি। এই চিঠির প্রথমে তিনি হার্ডিকে তাঁর কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করে লিখেছেন যে তিনি তাঁর মধ্যে এমন এক সুহৃদকে পেয়েছেন যিনি রামানুজনের শ্রমকে সহানুভূতির সঙ্গে বিবেচনা করেছেন। তারপর তিনি তাঁর পদ্ধতি বা প্রমাণ বর্ণনা না করার কারণ সম্বন্ধে কিছু বলে আবেদন করলেন 'আমার দেওয়া গাণিতিক ফলগুলি আপনি যাচাই করে দেখুন, আর যদি সেগুলো আপনার নিজের দ্বারা করা ফলের সঙ্গে মিলে যায়, তা হলে অন্তত এটুকু মেনে নিন যে আমার সিদ্ধান্তের ভিত্তিমূলে (fundamental basis) কিছু সত্যতা আছে।' তারপর তিনি কী চান তা অকপটে হার্ডিকে জানিয়ে দিলেন। তিনি লিখলেন, 'তাই এই পর্যায়ে আমি যা চাই, তা হল আপনার মতো বিশিষ্ট অধ্যাপকের কাছে এমন স্বীকৃতি যে আমার মধ্যে কিছু উৎকর্ষ (worth) আছে। আমি আগে থেকেই অর্ধভুক্ত। আমার মগজের রক্ষার জন্য খাদ্য চাই এবং এটিই হল এখন আমার প্রথম বিবেচ্য। আপনার কাছ থেকে যে কোনো সহানুভূতিশীল চিঠি আমাকে বিশ্ববিদ্যালয় অথবা সরকার থেকে বৃত্তি পেতে সাহায্য করবে।'

চিঠিটা বিশ্লেষণ করলে সহজেই বোঝা যাবে যে, গণিতরাজ্যে পুরোপুরি নিয়োজিত হবার জন্য এক তীব্র আকৃতি নিয়ে রামানুজনের চিন্তা-ভাবনা, তবে

গণিতরাজ্যে গবেষণা তিনি ভারতেই বাস করে করতে চান।

হার্ডি রামানুজনের প্রথম চিঠির সঙ্গে পাঠানো উপপাদ্যগুলি পেয়ে বুঝতে পেরেছিলেন রামানুজনের গণিত প্রতিভার যথাযথ বিকাশলাভের জন্য কেমব্রিজে তাঁর শিক্ষার ব্যবস্থা করা প্রয়োজন। হার্ডির ধারণা, 'He had been carrying an impossible handicap, a poor and solitary Hindu pitting his brain against the accumulated wisdom of Europe'। এ প্রসঙ্গে নেভিল বলেছেন যে, গণিতের সাম্প্রতিক বিকাশ সম্বন্ধে না জেনে রামানুজন এমন জায়গা থেকে প্রতিটি অনুসন্ধান আরম্ভ করেছেন যা ইউরোপীয় গণিতজ্ঞরা 150 বছর আগে শুরু করেছেন এবং তাঁর আরম্ভ এমন জায়গা থেকে হয় নি যেখানে 1913 সালে তাঁরা পৌঁছে গেছেন।

সেই জন্যই গণিতের আধুনিক বিকাশ সম্বন্ধে সচেতন এবং উচ্চ পর্যায়ের গণিতজ্ঞ এমন ব্যক্তিদের সঙ্গে রামানুজনের যোগাযোগ এবং পারস্পরিক আলোচনা একান্ত প্রয়োজন। এই প্রেক্ষাপট মাথায় রেখে হার্ডি রামানুজনকে কেমব্রিজে আনার কাজে প্রথম থেকেই লেগে গিয়েছেন। কিন্তু রামানুজনকে কেমব্রিজে আসার আমন্ত্রণ জানানো হলেও তিনি তা গ্রহণ করেন নি। তখনকার দিনে হিন্দু ব্রাহ্মণদের কালাপানি (সমুদ্রের জল) অতিক্রম করা মানেই গর্হিত কাজ এবং অনেক ক্ষেত্রে এমন কাজ করে দেশে ফিরে আসার পর তাকে জাতিচ্যুত হতে হত, এমন কী তার পরিবারের সঙ্গে অন্যরা সম্পর্ক রাখতে চাইত না। এই সামাজিক পটভূমিতে রামানুজনের বিদেশ যাওয়ায় তাঁর মা রাজি ছিলেন না। তাছাড়া একদল বন্ধু তো ভেবে বসলেন যে প্রাপ্য গৌরব থেকে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়কে বঞ্চিত করে তা ইংরেজদের বিশ্ববিদ্যালয়ে স্থানান্তরিত করার কৌশল করা হচ্ছে। অতএব রামানুজনের পক্ষে তখন আর কেমব্রিজে যাওয়া হয়ে উঠল না। সেটা ছিল 1913 সালে মার্চ মাস। কিন্তু প্রায় এক বছর পরে এক নাটকীয় পরিস্থিতিতে রামানুজন ইংল্যান্ড যাত্রা করেন। সেই যাত্রার সরস কাহিনী পরে বর্ণনা করা হবে। তবে এখানে রামানুজনের আমন্ত্রণ গ্রহণ না করার বিষয়ে দু'চার কথা বলা দরকার। হার্ডি লন্ডনে ভারতীয় ছাত্রাবাসের সচিবকে রামানুজনকে কেমব্রিজে নিয়ে আসার কোনো উপায় বের করা যায় কিনা তা দেখতে অনুরোধ করেন। এই অনুরোধের ফলে মাদ্রাজে ভারতীয় ছাত্রদের জন্য উপদেষ্টা কমিটির সচিব রামানুজনকে কেমব্রিজে নিয়ে আসার হার্ডির ইচ্ছার কথা জানালে রামানুজন রাজি হন নি। তবে এটা উল্লেখ করা একান্ত প্রয়োজন যে, রামানুজন নিজে কিন্তু জাত হারাবার ভয়ে বা ধর্মীয় কারণে ইংল্যান্ড যেতে রাজি হন নি— এ ধারণা একদম ঠিক নয়। তাঁর না যাবাব কারণের উত্তর পাওয়া যায় 1914 সালের 22শে

জানুয়ারিতে লেখা চিঠিতে। আসলে রামানুজনকে যখন তাঁর সম্মতির কথা জিজ্ঞেস করা হয়েছিল তখন তিনি দ্বিধা করছিলেন এই ভেবে যে এজন্য তাঁকে কোনো পরীক্ষা বসতে হবে কিনা। এই অবসরে রামানুজনের সঙ্গে যাওয়া তাঁর অফিসের একজন উপরওয়ালা অফিসার, যিনি নিজে একজন গোঁড়া ব্রাহ্মণ, তিনি না করে দেন। [পরিশিষ্টে চিঠিটি দেওয়া আছে]।

রামানুজনের জীবনের নানা ঘটনাস্রোতের মধ্যে এমন একটি ঘটনা এরই মধ্যে ঘটে গেল যা ভারতের শিক্ষার ইতিহাসে এক অভূতপূর্ব নজির হিসাবে চিহ্নিত। এফ এ অনুত্তীর্ণ এমন কোনো ব্যক্তিকে ভারতের এক বিশিষ্ট বিশ্ববিদ্যালয় থেকে গবেষণার জন্য বৃত্তি প্রদান করা এক অবিশ্বাস্য ঘটনা হলেও সত্য হল রামানুজনের ক্ষেত্রে। যদিও এর পিছনে ছিল নানা প্রভাবশালী ব্যক্তির সক্রিয় ভূমিকা এবং নানা ক্রিয়াকাণ্ড। কেমব্রিজে যখন রামানুজনের যাওয়া হল না, তাঁর গণিত প্রতিভার যথাযথ বিকাশ ও পুষ্টির জন্য কোনো অনুকূল পরিবেশ সৃষ্টি করা যায় কিনা সেই সেই ভাবনা অনেকের মধ্যে সক্রিয় হল। এই ভাবনার সঙ্গে রামচন্দ্র রাও, সেশু আয়ার, নারায়ণ আয়ার, রামস্বামী আয়ার প্রমুখদের আন্তরিক প্রয়াস যুক্ত হল। চেষ্টা চলল যাতে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় থেকে গবেষণার কোনো বৃত্তি রামানুজনের জন্য ব্যবস্থা করা যায় ; তা হলে তাঁর সংসারের আর্থিক প্রয়োজনের সুরাহা হবে এবং তিনি সর্বদা গণিতশাস্ত্রের গবেষণা নিয়ে নিয়োজিত থাকতে পারবেন। কাকতালীয় ভাবে ঐ সময় (1913 সালের 24শে ফেব্রুয়ারি) ভারতীয় আবহাওয়া দপ্তরের প্রধান ডঃ গিলবার্ট ওয়াকার (Dr. Gilbert Waker) মাদ্রাজ বন্দরের জোয়ার-ভাঁটা সংক্রান্ত গবেষণাগার পরিদর্শন করতে আসেন। ডঃ ওয়াকার ছিলেন র‍্যাঙ্গলার, বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ এবং এফ আর এস। স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং রামানুজনের গাণিতিক কাজকর্ম নারায়ণ আয়ারের মাধ্যমে ডঃ ওয়াকারের নজরে এনে মূল্যায়নের অনুরোধ করলে, তিনি এ কাজকর্মের যথার্থ মূল্যায়নের জন্য কেমব্রিজের ট্রিনিটি কলেজের অধ্যাপক হার্ডির কাছে পাঠাতে বলেন। তখন হার্ডির সঙ্গে রামানুজনের যোগাযোগের কথা বলা হয় এবং 1913 সালে 8ই ফেব্রুয়ারি হার্ডির লেখা চিঠিও দেখানো হয়। ঐ চিঠি দেখে ডঃ ওয়াকার এমনভাবে প্রভাবিত হলেন যে, পরের দিনই তিনি মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে রামানুজনের বৃত্তির জন্য সুপারিশ করে চিঠি লেখেন যার কিছু অংশ এ রকম, '... এটা আমার কাছে পুরোপুরি স্বচ্ছ যে বিশ্ববিদ্যালয় যদি রামানুজনের জন্য অন্তত কয়েক বছর এমন ব্যবস্থা করে যাতে জীবিকা অর্জনের জন্য চিন্তা-ভাবনা না করে সারাটা সময় তিনি গণিতকে দিতে পারেন তা হলে বিশ্ববিদ্যালয়ের পক্ষে যথার্থ কাজ হবে।'

এই চিঠি পাবার পর গণিতের 'বোর্ড অফ স্টাডিজ'-এর কাছ থেকে মতামত চাওয়া হল। বোর্ড অফ স্টাডিজ 1913 সালের 19শে মার্চ সেনেট হাউসে মিটিং ডেকে আলোচনা করল। সেই মিটিং-এ এস নারায়ণ আয়ারকে ডাকা হয়েছিল রামানুজনের কাজ সম্বন্ধে বলার জন্য। গণিতের বোর্ড অফ স্টাডিজ ডঃ ওয়াকারের সঙ্গে সহমত পোষণ করল। তখন বোর্ডের পক্ষ থেকে অধ্যাপক বি হনুমন্ত রাও বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রার ফ্রান্সিস ডেউস্‌বারিকে (Francis Dewsbury) জানিয়ে দিলেন যে তাঁরা রামানুজনের জন্য মাসিক 75 টাকা হারে দু'বছরের জন্য বৃত্তির সুপারিশ করছেন। তিনি এই চিঠিটি 1913 সালের 25শে মার্চ লেখেন।

বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেট এই সুপারিশে সম্মতি প্রদান করল। কিন্তু এ ব্যাপারে কিছু আইনগত অসুবিধা ছিল। তাও দূরীভূত হল। বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রার সব জানিয়ে সরকারের শিক্ষা বিভাগের সচিবকে চিঠি দিলেন। তিনি চিঠিতে লিখলেন, 'The Regulations of the University do not at present provide for such a special scholarship. But the Syndicate assumes that Section XV of the Act of Incorporation and Section 3 of the Indian Universities Act, 1904, allow of the grant of such scholarship, subject to the express consent of the Governor.'

যাই হোক, অবশেষে 1913 সালের 5ই এপ্রিল বৃত্তি অনুমোদনের আদেশ লেখা হল। পোর্ট ট্রাস্ট অফিসও দু'বছরের জন্য বেতন ছাড়া ছুটি মঞ্জুর করল। 1913 সালের 9ই এপ্রিলে লেখা রেজিস্ট্রারের দেওয়া চিঠির (letter no.1631) মাধ্যমে রামানুজন গবেষণার জন্য তাঁর বৃত্তি পাবার খবর পেয়ে গেলেন।

1913 সালের 1লা মে থেকে তিনি এ বৃত্তি গ্রহণ করলেন এবং তারপর থেকেই 'He became a professional mathematician and remained as such for the rest of his meteoric life' এবং রামানুজনই হলেন 'the first research schoalr of the University of Madras.'

তবে বৃত্তির একটা শর্ত ছিল, যা হল প্রতি তিন মাস অন্তর গবেষণার অগ্রগতির প্রতিবেদন রামানুজনকে পেশ করতে হবে এবং খুব নিষ্ঠার সঙ্গে রামানুজন এ শর্ত মেনে ছিলেন। তিনি শর্ত অনুযায়ী 1913 সালের 5ই আগস্ট, 7ই নভেম্বর এবং 1914 সালের 9ই মার্চ তাঁর গবেষণা সংক্রান্ত প্রতিবেদন পেশ করেন।

এই ফাঁকে অধ্যাপক হার্ডির সঙ্গে রামানুজনের পত্রালাপ থেমে ছিল না। হার্ডির ঐকান্তিক ইচ্ছা ছিল— সারা ইউরোপে গণিতের অগ্রগতির জন্য যে বিপ্লব সাধিত হয়েছে তা রামানুজন জানুন। তিনি আগেই রামানুজনের মধ্যে 'যথাযথ প্রমাণ'-এর

(rigorous proof) দ্বারা উৎসারিত করার ব্যাপারে চিঠি দিয়েছেন ; তাঁর কাছ থেকে তাঁর পাঠানো উপপাদ্যের যথাযথ প্রমাণ চেয়ে পাঠিয়েছেন। রামানুজন কিন্তু তাতে ঠিক সাড়া দেন নি। এ সব দেখে লিটলউডের ধারণা হয়েছিল যে রামানুজন হয়তো আশঙ্কা করছেন, হার্ডি তাঁর কাজ চুরি করে নিজের নামে চালিয়ে দেবেন। হার্ডি লিটলউডের এ ধারণার কথা জেনে রামানুজনকে লিখলেন যে, তিনি রামানুজনের গাণিতিক কাজ কেমব্রিজের অধ্যাপকবৃন্দ যেমন লিটলউড, বার্নেস, বেরিদের দেখিয়েছেন এবং রামানুজনের কোনো গাণিতিক কাজকে নিজের নামে 'illegitimate use' করার কোনো মানসিকতা তাঁর নেই। আসলে তিনি কী চাইছেন তা অকপটে লিখলেন। তিনি লিখলেন 'সত্যিকারের এমন কিছু করার ব্যাপারে চিন্তিত যাতে আপনাকে উন্নততর সুযোগ দিয়ে আপনার মধ্যে স্বাভাবিক গাণিতিক দানের সর্বোত্তম ব্যবহার করা যায়।'

হার্ডির এ চিঠি পেয়ে রামানুজনের প্রতিক্রিয়া, 'আপনি লিটলউডের কথা শুনে যা লিখেছেন তা দেখে আমি কিছুটা বেদনাহত। আমি আগের চিঠিতে জানিয়েছি যে, আপনার মধ্যে আমি এক সহানুভূতিশীল বন্ধুকে খুঁজে পেয়েছি। আমি আমার যা সামান্য কিছু আছে, তা নিঃসঙ্কোচে আপনার কাছে দিয়ে দেবার জন্য প্রস্তুত।' 1913 সালে 17ই এপ্রিলে লেখা এই চিঠিতে রামানুজন মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় থেকে গবেষণার জন্য বৃত্তিলাভ করার খবরও হার্ডিকে জানান।

এই সময় রামানুজন ত্রিপলিক্যানের হনুমন্তরায়ণ কইল লেনে থাকতেন। তিনি 1913 সালের 1লা মে থেকে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের গবেষক হিসাবে তাঁর পেশায় গেলে যান। কিন্তু হার্ডির স্থির বিশ্বাস, 'Ramanujan's genius would shine forth best in Cambridge'। তাছাড়া কেমব্রিজেই 'His (Ramanujan's) untutored genius would develop in full potential and be given a proper sense of direction.' আর 'হার্ডি যদি কোনো কিছু করার ব্যাপারে একবার কোনো সিদ্ধান্ত নেন তা থেকে তাঁকে বিরত রাখা কোন মানবসত্তার পক্ষেই সম্ভব নয়। অতএব রামানুজনকে ইংল্যান্ডে আনার ব্যাপারে কোনো বাধাই বাধা নয়, তবে হয়তো কোনো 'অতিমানবের' কিছু পরিমাণ সাহায্য প্রয়োজন।' হার্ডির সম্বন্ধে সি পি স্নোর এই ধারণা যে কত সত্যি, তা পরবর্তী ঘটনাগুলি প্রমাণ করবে।

1913 সালের শেষ লগ্নে অথবা 1914 সালের জানুয়ারিতে [সম্ভবত 1913 সালের 24শে ডিসেম্বরে] হার্ডি রামানুজনকে চিঠি লেখেন। তাতে রামানুজনের পাঠানো একটি গাণিতিক ফলকে ভুল হিসাবে অভিহিত করেন। তিনি লিখলেন

'The truth is that the theory of primes is full of pitfalls, to surmount which requires the fullest training in modern rigorous method. This you are naturally without.' এই অপ্রিয় সত্য কথা লেখার পর কিন্তু তিনি রামানুজনকে তাঁর সমালোচনার জন্য এতটুকু হতাশ হতে বারণ করেছেন এবং এটাও লিখেছেন, 'I think your argument a very remarkable and ingenious one'। এই চিঠিতে তিনি জানালেন যে তাঁর কলেজের ই এইচ নেভিল মাদ্রাজে বক্তৃতা দিতে গেছেন, রামানুজন যেন তাঁর সঙ্গে পরিচিত হন। তা হলে হয়তো রামানুজন নিজের অধ্যয়ন ও গবেষণার জন্য মূল্যবান উপদেশ পেতে পারেন।

এই সময় ট্রিনিটি কলেজের ফেলো তরুণ গণিতজ্ঞ নেভিল আমন্ত্রিত অধ্যাপক হিসাবে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতের সাম্মানিক ছাত্রদের জন্য অবকল জ্যামিতির (Differenctial Geometry) উপর এক প্রস্থ বক্তৃতা দেবার জন্য মাদ্রাজে আসেন। অধ্যাপক হার্ডি রামানুজনকে বুঝিয়ে কেমব্রিজে নিয়ে আসার দায়িত্ব তাঁর উপর অর্পণ করেছিলেন। নেভিল মাদ্রাজ এসে রামানুজনের সঙ্গে দেখা করেন। তিনি রামানুজনের 'নোটবই' দেখেন। এই নোটবই দেখেই রামানুজনের অসাধারণ ক্ষমতা সম্বন্ধে নেভিলের দৃঢ় প্রত্যয় জন্মায়। ফলে প্রভাবিত নেভিল 'take over initiative to overcome all the difficulties in arranging for Ramanujan's visit to Cambridge.'

নেভিল মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে 1914 সালের 28শে জানুয়ারি চিঠিতে লিখলেন, 'মাদ্রাজে রামানুজনের মতো প্রতিভার আবিষ্কার আমাদের সময়ে গণিত জগতে সবচেয়ে কৌতূহলপূর্ণ ঘটনা।' তারপর তিনি রামানুজনের ইংল্যান্ড যাবার প্রয়োজনীয়তার সপক্ষে যুক্তি দেখালেন এবং বিশ্ববিদ্যালয়কে এ ব্যাপারে সক্রিয় হতে অনুরোধ করলেন। আর রামানুজনকে কেমব্রিজে পাঠানো সম্ভব হলে তাঁর দৃঢ় বিশ্বাস, 'In that case his name will become one of the greatest in the history of mathematics, and the University and the City of Madras will be proud to have assisted in his passage from obscurity ot fame.'

নেভিলের এই প্রয়াসের সঙ্গে যুক্ত হল মাদ্রাজ অবজারভেটরির অধ্যাপক রিচার্ড লিট্লহেইলস-এর (Richard Littlehailes) প্রয়াস। নেভিলের চিঠি লেখার পরের দিন অর্থাৎ 1914 সালের 29শে জানুয়ারি রামানুজনকে ইংল্যান্ডে পাঠাবার জন্য তিনি বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে লিখলেন এক গুরুত্বপূর্ণ চিঠি। তাতে এক জায়গায় যা লেখা ছিল তা উদ্ধৃত করা যাক, 'Ramanujan is a man of most remarkable mathematical ability, amounting I might say to genius, whose light is metophorically hidden under a bushel in Madras.' তিনি বার্ষিক 250 পাউন্ড বৃত্তি এবং যাত্রা ও পোশাকের খরচ হিসাবে 100 পাউন্ডের জন্য সুপারিশ করলেন।

তাঁদের প্রয়াসের সঙ্গে যুক্ত হল স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং-এর ঐকান্তিক প্রচেষ্টা। তিনি তখনকার মাদ্রাজের গভর্নর লর্ড পেন্টল্যান্ড -এর (Lord Pentland) সঙ্গে দেখা করেন এবং তাঁর সচিব সি বি কটরেলকে (C.B. Cottrell) 1914 সালের 5ই ফেব্রুয়ারি চিঠি লিখে অনুরোধ করেন রামানুজনের জন্য বৃত্তি অনুমোদন করার। এই চিঠিতে স্যার ফ্রান্সিসের মহত্ত্ব এবং রামানুজনের প্রতি স্নেহ ফুটে উঠেছে। চিঠিটির কিছু অংশে তিনি লিখেছেন যে বিশিষ্ট গণিতজ্ঞরা মনে করেন রামানুজন হচ্ছেন, 'a mathematician of a new and high, if not transcendental, order of genius'। এই চিঠির অন্য জায়গায় তিনি লিখছেন যে লিট্‌লহেইলস্ ও নেভিল তাঁকে অনুরোধ করেছেন বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেটের বৃত্তিদানের সিদ্ধান্ত যাতে খুব দ্রুত অনুমোদিত হয় সে বিষয়ে স্প্রিং যেন লেখেন। কিন্তু তিনি লিখছেন 'I write under no mandate from the syndicate but merely as a private individual interested in my own employee Ramanujan as well as in Mathematics'। তিনি এ আশা প্রকাশ করেছেন যে, মিঃ আর্থার ডেভিস (ভারতীয় ছাত্রদের জন্য উপদেষ্টা কমিটির সচিব) নিশ্চয় রামানুজনের সমুদ্র যাত্রার ব্যবস্থা করবেন এবং তাঁর নিজস্ব ধর্মবিশ্বাসে যাতে কোনো আঘাত না লাগে সে দিকে নজর দেবেন।

এঁদের সার্বিক প্রয়াসে তাড়াতাড়িই সব কিছু সুষ্ঠুভাবে ঘটল। রামানুজনের জন্য দু' বছরের বৃত্তি মঞ্জুর হল। এই অনুমোদন হল 'Order No 182, Educatioanl', তারিখ হল '12ই ফেব্রুয়ারি, 1914.' এই আদেশের নিচের ডব্লু ফ্রান্সিসের সই ; তার নিচের 'Ag. Secretary to Government'- লেখা আছে। তাতে লেখা ছিল, '.... the Government sanction the appropriation of a sum not exeeding Rs. 10,000 from the University Vacation Lectures Fund for the grant to S. Ramanujan of a scholarship of £250 a year, tenable in England for a period of two years, free passage and reasonable sum to outfit.' [পরিশিষ্টে সংযোজিত]

এ দিকে রামানুজন নেভিলের সঙ্গে কথা বলে কেমব্রিজ যাবার জন্য তৈরি। তবে তার আগে এক অদ্ভুত ঘটনা ঘটে গেছে। রামানুজনের মা কোমলতা একদিন স্বপ্নে দেখলেন কয়েকজন ইউরোপীয় রামানুজনকে ঘিরে বসে আছেন। আর

নাম্মাকলের অধিষ্ঠাত্রী দেবী নামগিরি আদেশ দিয়েছেন যে, তিনি যেন তাঁর ছেলের জীবনের আকাঙ্ক্ষা পূরণে বাধা হয়ে না দাঁড়ান। এই স্বপ্ন, হার্ডির ঐকান্তিক কামনা ও প্রয়াস, নেভিল সহ অন্যান্যদের সক্রিয় ভূমিকা সব কিছু মিলে পরিশেষে রামানুজনের কেমব্রিজে যাওয়া সম্ভব হল।

তবে একটি ব্যাপারে সবার দৃষ্টি আকর্ষণ করা যেতে পারে। তখনকার স্থানীয় কলেজ বা বিশ্ববিদ্যালয়ে এমন কেউ ছিলেন না যিনি রামানুজনের গাণিতিক কাজকর্মের গভীরতাকে ঠিকমতো বুঝতে পারেন। তবুও মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় কেমব্রিজে পড়ার জন্য রামানুজনকে প্রথম গবেষণার বৃত্তি প্রদান করেন, যদিও তিনি এফ এ পরীক্ষায় অকৃতকার্য। সত্যি এ এক অনন্য নজির!

1914 সালের ফেব্রুয়ারিতে বৃত্তির খবর পেয়ে তিনি মা ও স্ত্রীকে কুম্ভকোনমে পাঠিয়ে দিলেন এবং 1914 সালে 17ই মার্চ এস এস নেভাসা (S.S.Nevasa) জাহাজে করে ইংল্যান্ড যাত্রা করেন। তবে এখানে বলে রাখা দরকার যে, রামানুজনের যাত্রার দিন সকালে রামানুজনের সম্মানে এক শুভেচ্ছাজ্ঞানক অনুষ্ঠানের আয়োজন করা হয়। আয়োজক ছিলেন অ্যাডভোকেট জেনারেল শ্রীনিবাস আয়েঙ্গার। সেখানে উপস্থিত ছিলেন অধ্যাপক মিড্‌লমাস্ট, স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং, হিন্দু কাগজের প্রকাশক কস্তুরীরঙ্গম আয়েঙ্গার, কয়েকজন বিশিষ্ট বিচারক, নারায়ণ আয়ার ও অন্যান্যরা। রামানুজনকে সবার সঙ্গে পরিচয় করিয়ে দেওয়া হল। মাদ্রাজের ডিরেক্টর অফ পাবলিক ইনস্ট্রাকশন জে এইচ স্টোন সাফল্যের জন্য শুভেচ্ছা জ্ঞাপন করলেন। সবাই সহর্ষ শুভকামনা জানাল। মাঝখানে নারায়ণ আয়ার ও রামানুজনের মধ্যে নিজেদের স্লেট পালটাপালটি হল ভবিষ্যতের স্মৃতিচিহ্ন হিসাবে।

যাত্রার প্রাক্কালে রামানুজনের অনুভূতিই বা কেমন ছিল? সে সম্বন্ধে ক্যানিগেলকে উদ্ধৃত করি, "For most everyone, it was time of good cheer and light banter. But not for Ramanujan who, recalled a friend, 'was in tears'."

ইংল্যান্ডে যাবার আগেই তিনি বিশ্ববিদ্যালয়কে বলে তাঁর বৃত্তির অর্থ থেকে বার্ষিক 60 পাউন্ড কুম্ভকোনমে বাবা-মার কাছে পাঠাবার ব্যবস্থা করেন। মিঃ আর্থার ডেভিস এবং অধ্যাপক লিটলহেইল্‌স রামানুজনের যাত্রার খুঁটিনাটি ব্যাপারগুলো তদারকি করেন। জাহাজে প্রথম তিনদিন রামানুজন সমুদ্রপীড়ায় অসুস্থ থাকলেও বাকি দিনগুলি আনন্দেই ছিলেন। অনেক সাগরের জল ছুঁয়ে, নানা বন্দর ঘুরে নেভাসা ইংলিশ চ্যানেল পেরিয়ে টেমসের মোহানা দিয়ে লন্ডনে পৌঁছোলো 1914 সালের 14ই এপ্রিল।

বিদেশে

রামানুজন যখন 1914 সালের 14ই এপ্রিল লন্ডনের ডকে এসে পৌঁছোলেন, তখন সেখানে তাঁকে স্বাগত ও অভ্যর্থনা জানাতে উপস্থিত ছিলেন নেভিল ও তাঁর ভাই। তাঁরা রামানুজনকে ইংল্যান্ডে আসা ভারতীয় ছাত্রদের জন্য নির্দিষ্ট ক্রোমওয়েল রোডে অবস্থিত অতিথিশালায় নিয়ে গেলেন। তবে এখানে তাঁকে বেশি দিন থাকতে হয় নি। 18ই এপ্রিল নেভিল তাঁকে নিজের আবাসনে নিয়ে আসেন। নেভিল তখন কেমব্রিজের উপকণ্ঠে অবস্থিত ক্যাম নদীর কাছে চেস্টার টাউন রোডে বাস করতেন— নব বিবাহিত স্ত্রী এলিসের সঙ্গে। নেভিলের বাড়ি থেকে ক্যাম নদী ও ভিক্টোরিয়া ব্রীজের দৃশ্য মাঝে মাঝেই দেখে রামানুজন বেশ আনন্দ উপভোগ করতেন। এখানে এসে কাজে লেগে যেতে রামানুজনের অসুবিধা হল না। কলেজে তাঁর ভর্তি হওয়া, বিভিন্ন কাগজপত্র পূরণ করা প্রভৃতি কাজের বেশির ভাগ অংশই হার্ডি ও নেভিল সমাধা করে দেন।

রামানুজন যখন ইংল্যান্ডে এসে পৌঁছোলেন, তখন সেখানে বসন্তকাল। উষ্ণ সুন্দর আবহাওয়া, ফুলের মনোরম সমাবেশ ও আনন্দগ্রাহী মধুর পরিবেশে রামানুজন তখন গণিতসাধনার আদর্শ পীঠস্থান কেমব্রিজে উপস্থিত। সঙ্গে পেলেন মহান ব্যক্তি এবং আদর্শ শিক্ষক হার্ডির সাহচর্যের অফুরান সুযোগ। এঁর সঙ্গে আছেন আর এক বিশিষ্ট শিক্ষক লিটলউড। রামানুজন দু'জনের সঙ্গে নিজের সাধনার কাজে জুড়ে গেলেন। সাধারণত সপ্তাহে একদিন লিটলউড এবং বেশির ভাগ সময় হার্ডি রামানুজনের শিক্ষণের কাজে ব্যস্ত থাকতেন। নেভিলও সাহায্য করছেন। রামানুজন তখন সৃষ্টিসুখের আনন্দে ব্যস্ত ; কঠোর পরিশ্রম করছেন এবং তাতে তিনি বেশ সুখ অনুভব করছেন। 1914 সালে জুন মাসে তাঁর লেখা চিঠি থেকে জানা যায় যে কলেজে তিনি ভর্তি হয়ে গেছেন এবং তাঁর জন্য বার্ষিক 60 পাউন্ড বৃত্তির ব্যবস্থাও হয়েছে। সব ব্যবস্থা হার্ডিই করছেন। তিনি লিখেছেন 'Mr. Hardy, Mr. Neville and others here are very unassuming, kind and obliging.'

প্রায় ছয় সপ্তাহ নেভিল দম্পতির উষ্ণ আতিথেয়তায় তাঁদের বাড়িতে থাকার পর রামানুজন হোয়েওয়েল কোর্টে অবস্থিত ট্রিনিটি কলেজের ছাত্রাবাসে চলে আসেন। ফলে হার্ডির সঙ্গে তাঁর যোগাযোগের আরো বেশি সুবিধা হয়। হার্ডি তখন ছাত্রাবাসের কাছেই থাকতেন। সাধারণত ছাত্রাবাসের প্রত্যেক আবাসিকের জন্য দুটি ঘরের বরাদ্দ

হলেও রামনুজনকে তিনটি ঘর দেওয়া হল। কারণ, নিরামিষাশী রামানুজন নিজের হাতে রান্না করতেন। ইংল্যান্ডে প্রথমে এসে তাঁর কিছুটা অসুবিধা হলেও তিনি ছিলেন তৃপ্ত ও সুখী। এ প্রসঙ্গে নেভিলের কথা শোনা যাক, 'অচেনা সভ্যতার পরিবেশে এসে তাঁকে কিছু কিছু ছোটো-খাটো অসুবিধা ভোগ করতে হচ্ছিল; সব্জিগুলি ছিল খাবার জন্য অউপাদেয়, কারণ এগুলি ছিল একদম অপরিচিত। ছাব্বিশ বছর ধরে যে ধরনের জুতা পরার অভ্যাস ছিল না, তা পরে পায়ের যন্ত্রণা বাড়ে। তবুও তিনি সুখী মানুষ।' তিনি পেয়ে গেছেন মনের মতো গণিতচর্চার উপযুক্ত ও আদর্শ পরিমণ্ডল এবং সেই সঙ্গে পেয়েছেন গণিতমনের যথার্থ সাথি। এখন তিনি চিন্তামুক্ত হয়ে গবেষণায় লেগে থাকার যেন সত্যিকারের সুযোগ পেলেন। হার্ডির কথায়, 'He was now. for the first time in his life. in a really comfortable position. and could devote himself to his research without anxiety.'

কেবলমাত্র কারের বই এবং অন্যান্য আরো কিছু গণিতের সাধারণ বইয়ের সঙ্গে পরিচয় নিয়েই রামানুজন ইংল্যান্ডে পৌঁছেছেন। গণিতের আধুনিক বিকাশের উপর লেখা তখনকার প্রকাশিত কোনো গণিতগ্রন্থ তিনি দেখেন নি। তা সত্ত্বেও তিনি সমকালীন গণিতজ্ঞানের স্তর থেকে পিছিয়ে ছিলেন না বলে মন্তব্য করেছেন জে আর নিউম্যান। তিনি লিখেছেন, 'Thus. in a lone mighty sweep, he had succeeded in recreating in his field. through his unaided powers. a rich half century of European mathematics'। ইংল্যান্ডে আসার পর তাঁর যে গণিতজ্ঞান ছিল সে সম্বন্ধে বলতে গিয়ে হার্ডি বলেছেন, 'The limitation of his knowledge was startling as its profoundity'। কারণ, নূতন বা পুরোনো, সঠিক বা ভুল যাই হোক না কেন রামানুজন তাঁর উদ্ভাবিত গাণিতিক ফলগুলি পেয়েছেন এমন এক পদ্ধতির মাধ্যমে যা হল 'a process of mingled argument. intuition and induciton. of which he was entirely unable to give a coherent account.'

হার্ডি উপলব্ধি করলেন যে, রামানুজন গণিতের যে শাখার উপর গবেষণা করবেন সে বিষয়ের বিকাশ সম্বন্ধে তাঁর অজ্ঞতা দূর করা দরকার। তাই তিনি রামানুজনের যথাযথ শিক্ষায় নিজেকে নিয়োজিত করেন এবং রামানুজনের জন্য প্রচুর সময় ব্যয় করেন। পারস্পরিক আলোচনা ও পর্যালোচনা চলতে থাকে। এতে দু'জনেরই লাভ হয়। কে বেশি লাভবান হন সে বিষয়ে তর্কে গিয়ে কাজ নেই, যদিও হার্ডির বিনয়পূর্ণ মন্তব্য ছিল যে, যতটা রামানুজন তাঁর কাছ থেকে শিখেছেন তার

চেয়ে তিনি অনেক বেশি রামানুজনের কাছে শিখেছেন।

হার্ডি রামানুজনকে নূতন ধারার ইউরোপীয় গণিতজ্ঞ হিসাবে গড়ে তোলার চেষ্টা করেন নি। রামানুজন যাতে তাঁর নিজস্ব পদ্ধতির মাধ্যমে সনাতন প্রথা অনুসারে সৃজনশীল চিন্তাধারাকে অনুসরণ করে উদ্ভাবন করতে পারেন, সে দিকেই হার্ডি নজর দিয়েছেন। তিনি চেষ্টা করেছেন, যাতে রামানুজন উপপাদ্যের বিশ্লেষণাত্মক প্রমাণ দেওয়াকে ঠিকমতো গুরুত্ব দেন এবং উপপাদ্যের সঙ্গে যাতে প্রমাণ সরবরাহ করেন। কিন্তু এ এক দুরূহ কাজ। কারণ, প্রথাগত শিক্ষার অভাব এবং গণিতের আধুনিক বিকাশ সম্বন্ধে অপরিচিতি— এই বাধা নিয়েও অসাধারণ গণিত প্রতিভার অধিকারী রামানুজনকে যথাযথ প্রথাপ্রকরণ শেখাতে হবে এবং তাঁর মধ্যে সুসামঞ্জস্যপূর্ণ কাজের ধারাকে উৎসারিত করতে হবে যাতে তাঁর স্বাভাবিক বিকাশের ধারায় কোনো বিঘ্ন সৃষ্টি না হয়। পেশাগত প্রখর বুদ্ধি, অসীম ধৈর্য, সঠিক যত্ন ও নিবিড় সাহচর্যের যথাযথ প্রয়োগের মাধ্যমেই এই কঠিন কাজ সম্পন্ন করতে হবে। বলা যায়, এ ব্যাপারে হার্ডি সফল হয়েছিলেন।

কিন্তু এটা উল্লেখ করা দরকার যে, ইংল্যান্ডে থাকার সময়ও রামানুজনের বিকশিত হবার ধারা বাধাপ্রাপ্ত হয়েছে। জীবনের প্রতিটি পদক্ষেপে যেন রামানুজনকে বিপত্তির সম্মুখীন হয়ে তীব্র সংগ্রাম করে জয়ী হতে হবে। কেমব্রিজে আসার কয়েক মাসের মধ্যেই প্রথম বিশ্বযুদ্ধ বেঁধে যাওয়ায় একের পর এক বাধা রামানুজনের সামনে এসে উপস্থিত হতে থাকে। অধ্যাপক লিটলউডকে যুদ্ধে চলে যেতে হয়। ফলে তাঁর প্রধান দু'জন সহযোগী অধ্যাপকের মধ্যে একমাত্র হার্ডিই থেকে গেলেন। যুদ্ধের জন্য অন্যান্য অধ্যাপকরাও পড়ানোর আগ্রহ হারিয়ে ফেলেন। গণিতের যে সব শাখায় রামানুজনের কাজ করার আগ্রহ ছিল, সে সব শাখার সমআগ্রহী বা বিশেষজ্ঞ গণিতবিদদের সঙ্গে গুরুত্বপূর্ণ আলোচনা থেকে তিনি বঞ্চিত হন। এ প্রসঙ্গে একজন মন্তব্য করেছিলেন যে, রামানুজন সবচেয়ে দুর্ভাগ্যপূর্ণ সময়ে ইংল্যান্ডে অবস্থান করছিলেন। যেখানে যুদ্ধের আগে ছাত্রসংখ্যা 700 ছিল, সেখানে যুদ্ধের পর 1915 সালে সে সংখ্যা 150-এ নেমে আসে।

এ প্রসঙ্গে নেভিলের প্রতিবেদনের কিছু অংশ উল্লেখ করা প্রয়োজন। তিনি বলেছিলেন যে, অনেকের মনে হতে পারে ইংল্যান্ডে রামানুজনের প্রকাশিত গবেষণাপত্রগুলিতে বিভিন্ন গণিত শাখার বিষয়বস্তুর বৈচিত্র্য তাঁর প্রথম জীবনের নোটবইগুলির বিভিন্ন বিষয়বস্তুর তুলনায় সীমিত ; ভারতে বসে তিনি যে সব বিষয় নিয়ে চিন্তা-ভাবনা শুরু করেছিলেন তার প্রতিটি এখানে যথাযথ মনোযোগ পায় নি।

এর কারণ, 'Hardy could guide Ramanujan rapidly and accompany him profitably in regions of mathematics where he was himself at home.' আর অন্যান্য গণিতজ্ঞদের সান্নিধ্য থেকে তিনি যুদ্ধের কারণে বঞ্চিত ছিলেন।

হার্ডি নিজেও মনে করেন— প্রথম মহাযুদ্ধ রামানুজনের যথাযথ গণিতচর্চায় বাধা সৃষ্টি করেছে। তিনি লিখেছেন, 'যিনি আমার সহযোগী হয়ে তাঁকে (রামানুজনকে) অনেক বিষয়ে আলোকপাত করতে পারতেন, সেই অধ্যাপক লিটলউডও দূরে চলে গেছেন এবং এমন একজন প্রতিভাধর ছাত্রের জন্য একজন মাত্র শিক্ষক যথেষ্ট নয়।' তবে হার্ডির সঙ্গে রামানুজন এমনভাবে জড়িয়ে গেলেন যে তাঁরা দুজনে যেন এক সত্তায় পরিণত হলেন। এ প্রসঙ্গে রামানুজনের অন্যতম জীবনীকার সুরেশ রাম যথার্থ বলেছেন, 'The two developed a mutual relationship which has no parallel in the mathematical world and has immortalised both of them.'

অপরিচিত পরিবেশ, মাদ্রাজের সম্পূর্ণ বিপরীত আবহাওয়া অথবা খাদ্যাভাসের অসুবিধার সম্মুখীন হলেও রামানুজনের কাছে যুদ্ধের জন্য সহযোগী অধ্যাপকবৃন্দের অভাব ছাড়া অন্য কোনো কিছুই কোনো অসুবিধা হিসেবে গুরুত্ব পায় নি। প্রথম দিকে তাঁর খাদ্যের উপকরণ (তেঁতুল, নারিকেল তেল ইত্যাদি) বাড়ি থেকে ডাকঘরের সাহায্যে সংগ্রহ করে নিতেন। এ ব্যাপারে তাঁকে লন্ডনের একটি কোম্পানি সাহায্য করত।

কিন্তু 1915 সালের জানুয়ারির পরে তাঁর এ সবের দরকার হয় না। নিজের স্বাদের উপর নিয়ন্ত্রণ জারি করতে তাঁর কোনো অসুবিধে হয় নি। তবে এটা বলা যায় যে, নিজের রুচি মতো খাবার না পেলেও ভালো দুধ ও ফল পাওয়ার সুবিধে ছিল। এর ফলে কিছুটা অসুবিধা দূর হয়। নিরামিষাশী রামানুজন নিজের হাতেই নিজের রান্না করতেন। নিজের জন্য দায়সারা ভাবে রান্না করলেও তিনি ইচ্ছে করলে ভালো নিরামিষ রান্না করতে পারতেন। রান্নায় বেশি সময় নষ্ট না করার জন্য একজনের পরামর্শে একবার তিনি ক্যান্টিন থেকে মাঝে মাঝে আলুভাজা আনতে থাকেন। তিনি ডিম বা পেঁয়াজ খেতেন না, এমন কী টমাটোও খেতেন না। পরে তাঁকে খ্যাপানোর জন্য একজন রসিকতা করে বলে যে চর্বি দিয়ে আলুকে ভেজে ক্যান্টিনের আলুভাজা প্রস্তুত করা হয়। এরপর থেকে তিনি বাইরের খাবার গ্রহণ করা বন্ধ করে দেন। কিন্তু নিবিড় গণিতচর্চার জন্য অনেক সময় রান্না করার সময় পেতেন না। তাই মাঝে মাঝে কিছু না খেয়ে বা খুব কম খেয়ে দিন কেটে যেত। তাতে তাঁর কোনো রকম খেয়ালও

থাকত না। তাঁর একমাত্র কাজ ছিল নিবিষ্ট মনে গণিতরূপী সরস্বতীর একাগ্র সাধনা। ফলে ভারতীয় মজলিশ বা ইন্ডিয়া অফিস, মিটিং ইত্যাদি থেকে তিনি সবসময় দূরে থাকতেন, যদিও ইংল্যান্ডে থাকার সময় কয়েকজন ভারতীয়ের সাথে তাঁর বন্ধুত্ব গড়ে উঠেছিল। এই সব ব্যক্তির প্রতিবেদন থেকে রামানুজন সম্বন্ধে তখনকার কিছু কিছু ঘটনা আমরা জানতে পারি।

আচারে ও আচরণে রামানুজন অন্যান্যদের চেয়ে একদম আলাদা ছিলেন। সবসময় নিজের স্বকীয়তা তিনি বজায় রাখতেন। ইংরেজি আচার-আচারণে তিনি কোনো আগ্রহই প্রকাশ করেন নি। এমন কী অনেক সাধারণ ব্যাপারে তিনি অজ্ঞ ছিলেন। এ প্রসঙ্গে একটা মজার ঘটনার কথা শোনা যেতে পারে।

ইংল্যান্ডে থাকার সময় যাঁদের সঙ্গে রামানুজনের বন্ধুত্ব গড়েছিল তাঁদের মধ্যে একজন হলেন প্রখ্যাত রাশিবিজ্ঞানী প্রশান্তচন্দ্র মহলনাবিশ। রামানুজনের ইংল্যান্ডে আসার আগে 1913 সালে তিনি কিংস কলেজে পড়ার জন্য এসেছিলেন। তাঁর স্মৃতিচারণা থেকে আমরা এ ঘটনার কথা জানতে পারি। তিনি একদিন ট্রিনিটি কলেজে রামানুজনের সঙ্গে দেখা করতে গিয়ে রামানুজনকে আগুনের পাশে বসে থাকতে দেখেন। বেশ ঠান্ডা ছিল সেদিন। রাতের বেলায় ঠান্ডার অনুভূতির কথা রামানুজনকে জিজ্ঞেস করায় তিনি বললেন যে, রাতে ওভারকোট ও শাল গায়ে দিয়েও খুব ঠান্ডা অনুভব করেছেন। মহলনাবিশ যখন রামানুজনের শোবার ঘর দেখতে যান, তখন তিনি আবিষ্কার করেন বিছানায় অনেকগুলি কম্বল একসঙ্গে শক্ত করে বাঁধা এবং তার উপর বেডকভার। শোবার সময় যে একটার পর একটা কম্বল বিছিয়ে তার মধ্যে শুতে হয়, তা রামানুজনের জানা ছিল না বলে এ বিপত্তি। তখন তিনি কী ভাবে কম্বলগুলি বিছিয়ে শুতে হয় তা রামানুজনকে শিখিয়ে দেন। এতে রামানুজন দারুণ খুশি।

যাই হোক, কেমব্রিজে আসার অল্প সময়ের মধ্যেই রামানুজন সেখানকার ছাত্র ও শিক্ষকদের বিশেষ দৃষ্টি আকর্ষণ করতে সমর্থ হয়েছিলেন। শুধু তাই নয়, সবার মধ্যে তিনি জনপ্রিয়ও হয়ে ওঠেন। ট্রিনিটি কলেজ আবাসনের লোকেরা তাঁকে খুব স্নেহ করতেন এবং তাঁর প্রতি একটা শ্রদ্ধার ভাবও পোষণ করতেন। তাঁদের কাছে রামানুজন ছিলেন 'প্রিয় জ্যাম' (**Dear Jam**)।

ইংল্যান্ডে এসে নানা ঘটনার মধ্যে গণিতে তাঁর অসাধারণত্ব প্রকাশ পেতে থাকে। যদিও তিনি কেমব্রিজে ক্লাশে বসে পড়াশুনো করতে আসেন নি, তবুও তিনি মাঝে মাঝে অধ্যাপকদের বক্তৃতা শোনার জন্য ক্লাশে উপস্থিত থাকতেন। এপ্রিলের

শেষ পর্ব থেকে শুরু হওয়া 'Eastern term'-এর এমন কিছু বক্তৃতায় তিনি হাজির ছিলেন। এগুলির মধ্যে কিছু বক্তৃতা ছিল অধ্যাপক হার্ডির এবং 'উপবৃত্তীয় সমাকলের' (elliptic integral) উপর কিংস কলেজের অধ্যাপক আর্থার বেরির (Arthur Berry)। একদিন বক্তৃতা দিতে গিয়ে অধ্যাপক বেরি কিছু সূত্র বোর্ডে প্রমাণ করার সময় যখন শ্রোতাদের দিকে তাকিয়ে বোঝার চেষ্টা করছিলেন যে, তারা ঠিকমতো বুঝতে পারছে কিনা, তখন তিনি হঠাৎ দেখতে পান— রামানুজনের মুখমণ্ডল বেশ উদ্ভাসিত, উত্তেজনায় তিনি যেন টগবগ করছেন। এই দেখে তিনি রামানুজন কিছু বলতে চান কিনা জিজ্ঞেস করায় রামানুজন বোর্ডে গিয়ে এমন ফল লিখলেন যা তখনও প্রমাণ করা হয় নি। এ সম্পর্কে মিঃ বেরির ধারণা, 'Ramanujan must have reached those results by pure intuition.'

ইংল্যান্ডে আসার পর রামানুজনের নোটবইতে সংক্ষিপ্তসারের আকারে লেখা উপপাদ্য ও সূত্রগুলিকে গাণিতিক প্রবন্ধ হিসাবে প্রকাশের জন্য এগুলির সম্পাদনা, পরিমার্জন ও পরিবর্ধন চল‹ ১ থাকে। নোটবইয়ের এই সব গাণিতিক ফল প্রসঙ্গে পরবর্তী কালে লিটলউড যে ম" ‚ করেছিলেন তা বিশেষভাবে উল্লেখের দাবি রাখে। তিনি বলেছিলেন, 'The beauty and singularity of his results is entirely uncanny.' এ সম্বন্ধে হার্ডি বলেছিলেন, 'He (Ramanujan) combined a power of generalisation, a feeling for form, a capacity for rapid modification of his hypothesis. that were really startling, and made him, in his own peculiar field, without a rival in his day.'

রামানুজনের নোটবইতে রত্নভাণ্ডারের সন্ধান পেয়ে হার্ডি শুধু খুশি নয়, তৃপ্তও। বেশ গর্ব অনুভবও করেন। কারণ তাঁর কথায় রামানুজন হলেন তাঁর 'আবিষ্কার' (discovery), কিন্তু পর মুহূর্তেই তিনি সংশোধনের সুরে বলেছেন যে তিনি রামানুজনকে আবিষ্কার (invent) করেন নি, অন্যান্য মহান ব্যক্তির মতো রামানুজন নিজে নিজেকে আবিষ্কার করেছেন। তবে হার্ডির দাবি, 'I was the first really competent person who had the chance to see some of his works. and can still remem'›er w‹th satisfaction that I could recognize at once what treasur.: I had

হার্ডির মনে হয়েছিল যে, রামানুজনের নোটবইয়ের বেশির ভাগ কাজ মূল্যবান প্রবন্ধ হিসাবে প্রকাশের দাবি রাখে ; কিন্তু এর জন্য সম্পাদনা প্রয়োজন। প্রয়োজন প্রকাশের উপযুক্ত আকার, প্রাঞ্জল ইংরাজি এবং পরিচিত ও প্রচলিত গাণিতিক চিহ্নের ব্যবহার। হার্ডি নিজের হাতে এ দায়িত্ব তুলে নেন। তিনি সম্পাদনা করলেন ;

পরিমার্জন ও পরিবর্ধন করে প্রবন্ধের আকার দিলেন। কিন্তু এর জন্য তিনি এতটুকু কৃতিত্বের দাবি করেন নি। এসব করেও তিনি বলেছেন যে, তিনি (হার্ডি), 'contributed nothing to the mathematics itself.'

যাই হোক 1914 সালের জুন মাসের মধ্যে হার্ডি ও রামানুজন দু'জনে মিলে নোটবইয়ের রসদ থেকে দুটি প্রবন্ধ লেখা শুরু করেন এবং একটি উপস্থাপনার জন্য প্রস্তুত হয়ে যায় খুব তাড়াতাড়ি। 1914 সালে 11ই জুন রামানুজন তাঁর বন্ধু আর কৃষ্ণ রাওকে লিখেছেন যে, তাঁর দুটো প্রবন্ধ প্রস্তুত এবং ঐ দিনই হার্ডি যাচ্ছেন তা লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটিতে পড়তে।

সাধারণত প্রতি মাসের দ্বিতীয় বৃহস্পতিবার অধ্যাপক হার্ডি কেমব্রিজ থেকে বিকেলের ট্রেন ধরে লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির সান্ধ্য অধিবেশনে যোগ দিতে যান। 1914 সালে 11ই জুনও তিনি গেলেন এ রকম অধিবেশনে যোগ দিতে। সেখানে রামানুজনের উদ্ভাবিত নানা উপপাদ্যে ঠাসা প্রবন্ধ পড়লেন। মজা হল, এই অধিবেশনে উপস্থিত শ্রোতাদের মধ্যে প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষভাবে রামানুজনের নামের সঙ্গে জড়িত অনেকেই ছিলেন। ছিলেন হবসন যাঁকে চিঠি লিখে রামানুজন উত্তর পান নি, ছিলেন ব্রোমউইচ যাঁর লেখা বই পড়ার জন্য রামানুজন হিলের কাছ থেকে উপদেশ পেয়েছিলেন, লিটলউড তো অবশ্যই থাকবেন এবং উপস্থিত ছিলেন অধ্যাপক এ ই এইচ লাভ (A.E.H. Love); কিন্তু উপস্থিত ছিলেন না স্বয়ং রামানুজন। অধ্যাপক লাভ সম্বন্ধে হার্ডির যে কি গভীর শ্রদ্ধা ছিল, তা ভাষায় প্রকাশ করা সম্ভব নয়। নিজে ফলিত গণিতের অধ্যাপক হয়েও ছাত্র হার্ডির মানসিক গঠন অনুধাবন করে তিনি হার্ডিকে উপদেশ দিয়েছিলেন বিশুদ্ধ গণিতের সে কালের অসাধারণ গ্রন্থ জর্ডনের (Jordon) 'Course d' analyse d' l Ecole Polytechnique' পড়তে। এই গ্রন্থটি পড়ে হার্ডি শুধু বিমোহিত নয়, বিশেষভাবে প্রভাবিতও। তিনি এই প্রসঙ্গে বলেছেন, 'I shall never forget the astonishment with which I read the remarkable work, the first inspiration for so many mathematicians of my generation, and learnt for the first time as I read it what mathematics really meant.'

হার্ভার্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের বক্তৃতায় রামানুজনের সঙ্গে তাঁর সম্পর্ক সম্বন্ধে বলতে গিয়ে হার্ডি বলেছিলেন, 'I owe more to him (Ramanujan) than to any one else in this world with one exception and my association with him is the one romantic incident of my life.' এই 'one exception'-ই

হচ্ছেন অধ্যাপক লাভ, যিনি হার্ডিকে জর্ডনের বই পড়তে উপদেশ দিয়ে শিখিয়েছিলেন গণিত শুধু প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষার জন্য নয়, গাণিতিক বিশ্লেষণী প্রণালীর মধ্যে নিহিত আছে গণিতের সৌন্দর্য ও অপূর্ব রূপ।

যাই হোক, রামানুজনের নোটবইয়ের অন্যান্য কাজ আর তখন তেমন দৃষ্টি পায় নি। রামানুজন তখন নূতন আবিষ্কারের আগ্রহে নিজেকে ব্যস্ত রেখেছেন। তিনি 1915 সালের জানুয়ারিতে বন্ধু এস এম সুব্রমনিয়ানকে লেখেন যে, তাঁর নোটবই 'is sleeping in a corner for these four or five months.' তিনি তাঁর নোটবইয়ের সূত্র-উপপাদ্য সম্বলিত প্রবন্ধ যুদ্ধের পর প্রকাশ করার সিদ্ধান্ত নিয়েছেন।

1914 এবং 1915 এই দুই বছরে রামানুজনের অনেকগুলি প্রবন্ধই প্রকাশিত হয়। 1914 সালে মাত্র একটা প্রবন্ধ প্রকাশিত হলেও 1915 সালে ন'খানা প্রবন্ধ ছাপা হয় ; এদের মধ্যে পাঁচখানা ইংল্যান্ডের বিভিন্ন জার্নালে এবং চারখানা ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে। এখানে বলা দরকার যে, 1914 সালের আগে সব মিলিয়ে 1914 সাল পর্যন্ত মাত্র ছ'টি প্রবন্ধ প্রকাশিত হয়েছিল। শেষেরটি ছাড়া প্রত্যেকটি প্রবন্ধ ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত হয়। 1915 সালের শেষ পর্বে 'Proceeding of London Mathematical Society'-তে প্রকাশিত অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা (Highly composite number) সংক্রান্ত অসাধারণ প্রবন্ধটি সম্বন্ধে হার্ডির মন্তব্য উল্লেখের দাবি রাখে। প্রবন্ধটিকে 'a very peculiar one, standing somewhat apart from the main channels of mathematical research' হিসাবে বর্ণনা করলেও হার্ডি বলেছেন, ' But there can be no question as to the extraordinary insight and ingenuity which he (Ramanujan) has shown in treating it, nor any doubt that his memoir is one of the most remarkable published in England for many years.'

রামানুজনের দু' বছরের বৃত্তির মেয়াদ যখন শেষ হবার মুখে তখন মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়কে রামানুজনের অগ্রগতি সম্বন্ধে এবং তাঁর বৃত্তির সময় বৃদ্ধির স্বপক্ষে ই ডব্লু বার্নেস (E.W. Barnes) চিঠি লেখেন। কেমব্রিজে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য একজন করে শিক্ষক বা টিউটর (tutor) থাকতেন যাঁর কাজ ছিল ছাত্রের অগ্রগতি সম্বন্ধে নজর রাখা ; আর বার্নেস ছিলেন রামানুজনের টিউটর। বার্নেসের কাছে 'Ramanujan was perhaps the most brilliant of all top Trinity students (which included Littlewood) to have come before him.'

রামানুজনের বৃত্তির মেয়াদ বৃদ্ধির জন্য রামানুজন সম্বন্ধে তিনি 1915 সালের 8ই নভেম্বর মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়কে লিখলেন, 'I confidnetly expect, he (Ramanujan) is elected to Fellowship at the college' এবং তিনি এই নির্বাচন 1917 সালে অক্টোবরে আশা করেন। অধ্যাপক হার্ডিও রামানুজনের বৃত্তির অনুকূলে রেজিস্ট্রারকে চিঠি লেখেন। তাতে তিনি রামানুজনকে আধুনিক সময়ের সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ হিসাবে অভিহিত করেন। তিনি আরও লিখলেন '......he is the most remarkable mathematician I have ever seen.' এই চিঠি দুটির সঙ্গে মাদ্রাজে স্যার ফ্রান্সিসের আন্তরিক প্রচেষ্টাও যুক্ত হল। ফলে 1915 সালের 7ই ডিসেম্বর মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেট রামানুজনের বৃত্তিকে আর এক বছরের জন্য বৃদ্ধি করল। মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের বার্ষিক 250 পাউন্ড ছাড়াও রামানুজন ট্রিনিটি কলেজ থেকে বার্ষিক 60 পাউন্ড পেতে থাকেন।

বৃত্তির এ সব অর্থ থেকে তিনি ইংল্যান্ডে নিজের আর্থিক প্রয়োজন মেটানো ছাড়াও ভারতে থাকা পরিবারের জন্য তিনি 50 পাউন্ড পাঠাতেন। অর্থ সংক্রান্ত কোনো চাপ তিনি আর মানসিক ভাবে অনুভব করতেন না এবং এর ফলে নির্ভাবনায় তাঁর গণিত গবেষণা চলতে থাকে।

পরবর্তী সময় এ বৃত্তি এক এক বছর করে বাড়ানো হয়েছিল। 1917 সালের 6ই মার্চের সিন্ডিকেটের মিটিং-এর বৃত্তির অনুমোদন ঐ বছর 13ই মার্চ সরকারি সম্মতি লাভ করে। পরবর্তী সময়ে 1918 সালের 16 এপ্রিল চিঠিতে আরো এক বছর বৃত্তির অনুমোদনের কথা রেজিস্ট্রার হার্ডিকে জানিয়ে দেন।

এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, সাধারণ গবেষক-ছাত্র (research student) হিসাবে কলেজে ভর্তির জন্য বিশ্ববিদ্যালয়ের ডিগ্রি বা সার্টিফিকেটের প্রয়োজন হয়। কিন্তু রামানুজনের ক্ষেত্রে তা মকুব করা হয়েছিল। তবে পরে রামানুজন ডিগ্রি লাভ করেছিলেন। 1916 স্যালে মার্চ মাসে তিনি বি এ ডিগ্রিতে ভূষিত হন—অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা সংক্রান্ত দীর্ঘ গবেষণাপত্রের জন্য এতদিনে রামানুজনের মনের নিভৃত কোণে হয়তো লুকিয়ে থাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের ডিগ্রি পাবার ইচ্ছে পূরণ হল ; অন্তত ছেলে বিশ্ববিদ্যালয়ের ডিগ্রি লাভ করবে রামানুজনের বাবার এই ইচ্ছে অবশেষে সফল হল। 1914 সালের 18ই মার্চ শনিবার বিকেল বেলায় রামানুজনকে এই ডিগ্রি প্রদান করা হয়। ডিগ্রি দেবার পর বি এ ডিগ্রি প্রাপকদের এক 'গ্রুপ ফটো' তোলা হয়

সেনেট হাউসের বাইরে। এই গ্রুপে রামানুজনের ছবিও আছে। এ ছবি প্রসঙ্গে তাঁর জীবনীকার ক্যানিগেলের বর্ণনা বেশ মনোরম। তিনি লিখেছেন, 'The shortest and the stockiest of the lot, he stood squarely at attention, like an army recruit in boot camp, his mortarboard sitting flat atop his head. His trouser legs were a couple of inches too short. His suit bulged, its buttons straining.'

ইংল্যান্ডে থাকার সময় রামানুজনের গণিত সাধনার স্রোত অনির্বাণ গতিতে চলছিল। তাঁর কঠোর পরিশ্রম কখনও থেমে থাকে নি। বিশেষত রাতের শান্ত পরিবেশে তাঁর মনোনিবেশ আরো গভীর হত। তিনি যেন রাতের বেলার গণিতসাধনার মধ্যে বেশি আনন্দ পেতেন। এ তথ্যের সপক্ষে জানকী দেবী পরবর্তী কালে তাঁর অভিজ্ঞতার কথা বলেছিলেন। তাছাড়া ইংল্যান্ডে থাকার সময় তাঁর এ অভ্যাসের কথা রামানুজনের বন্ধু একদা রাজস্থান বিশ্ববিদ্যালয়ের উপাচার্য অধ্যাপক জ্ঞানেশচন্দ্র চট্টোপাধ্যায়ের কাছ থেকে জানা গেছে।

অধ্যাপক চ্যাটার্জির কথা যখন প্রসঙ্গক্রমে এসে পড়ল, তখন তাঁদের নিয়ে একটা বেশ মজার ঘটনার কথা বলা যেতে পারে। ইংল্যান্ডে থাকার সময় জি সি চ্যাটার্জির সঙ্গে ইলা রুদ্রের পরিচয় হয় এবং এই পরিচয় পরে তাঁদের বিবাহসূত্রে আবদ্ধ করার ক্ষেত্র প্রস্তুত করে। তাঁদের বিয়ের খবর পেয়ে রামানুজন তাঁদের তাঁর নিজের ঘরে একদিন নৈশভোজের জন্য নিমন্ত্রণ করেন। যে দিন নিমন্ত্রণ ছিল সে দিন রামানুজন যত্ন করে নিজের হাতে রান্না করলেন। নৈশভোজে তাঁদের সঙ্গে উপস্থিত ছিলেন মৃণালিনী চট্টোপাধ্যায় যিনি হলেন কবি সরোজিনী নাইডুর বোন। খাবার পরিবেশনের সময় প্রথমে তিনি সুপ দিয়ে শুরু করেন। দু'বার সুপ নেবার পর তৃতীয় বার সুপ নিতে মহিলারা আপত্তি করেন। এরপর হঠাৎ দেখা গেল, রামানুজন নেই। কোথায় যেন তিনি উধাও হয়ে গেলেন। ঘণ্টা খানেক অতিবাহিত হয়ে যাবার পর রামানুজনকে দেখতে না পেয়ে সবাই তাঁর খোঁজ করলেন। জানা গেল, তিনি ট্যাক্সি করে কোথায় যেন চলে গেছেন। তাড়াতাড়ি ফিরবেন— এই ভেবে অতিথিরা তাঁর জন্য অপেক্ষা করতে থাকেন। কিন্তু তাঁর আর দেখা পাওয়া গেল না। পরের দিনও ফিরে না আসায় চ্যাটার্জি বেশ চিন্তিত হয়ে পড়লেন। পাঁচ দিন পর চ্যাটার্জি এক টেলিগ্রাম পেলেন যাতে রামানুজন অক্সফোর্ডের এক ঠিকানায় তাড়াতাড়ি পাঁচ পাউন্ড পাঠাতে বলেছেন। তখনই রামানুজনের প্রেরিত ঠিকানায় অর্থ পাঠানো হল। পরদিন রামানুজন ফিরে এলে তাঁর এই অন্তর্ধানের রহস্য জানা গেল।

তাঁর পরিবেশন করা খাবার যখন আর গ্রহণ করতে মহিলারা অস্বীকার করলেন, তখন তিনি খুব ব্যথিত হন এবং অপমানিত বোধ করেন। তাই তিনি বাড়ি থেকে চলে যান এবং যতক্ষণ তাঁরা বাড়িতে ছিলেন, ততক্ষণ তিনি বাড়ি ফিরতে চান নি। হাতে পয়সা থাকায় সোজা অক্সফোর্ড চলে যান। তারপর যখন পয়সা শেষ হয়ে গেল তখন চ্যাটার্জিকে টেলিগ্রাম করেন।

রামানুজনকে নিয়ে এমনি আরো দু' একটি মজার ঘটনা জি সি চ্যাটার্জির কাছ থেকে শোনা গেছে। একবার কোনো এক ছুটির সময় চ্যাটার্জি, অন্য এক বন্ধু এবং রামানুজন —এই তিনজন বেড়াতে এবং কয়েকদিন থাকার জন্য লন্ডনে এলেন। সেখানে উঁচু তলার এক ফ্ল্যাট ভাড়া নিলেন। রাতের খাবার নিচের তলায় তাঁদের সারতে হত। একদিন রামানুজন আগেই খাবার খেয়ে উপরে গিয়ে কিছু গাণিতিক কাজ করার জন্য চলে গেলেন। কিন্তু তাড়াতাড়ি আবার ফিরে এলেন। যখন চ্যাটার্জি তাঁর কাছে কারণ জানতে চাইলেন, তখন বললেন যে তাঁর বিছানার উপর একটা বেড়াল বসে আছে। তাকে তিনি তাড়াতে পারছেন না। অবশেষে চ্যাটার্জি নিজে গিয়ে একটা খবরের কাগজ ছুঁড়ে বেড়ালটাকে তাড়াতে চাইলেন। কিন্তু কিছুতেই বেড়ালটা নড়ল না। তখন তিনজনের কিংকর্তব্যবিমূঢ়ের অবস্থা। শেষে তাঁরা ঘণ্টা বাজিয়ে গৃহকর্ত্রীকে ডাকলেন। বেশি রাতে তাঁকে বিরক্ত করার কারণ জিজ্ঞেস করায় রামানুজন বেড়ালটাকে দেখিয়ে বললেন যে, এটা সরছে না। তখন ভদ্রমহিলা তাঁর উষ্মা ও বিরক্তি প্রকাশ.করে বললেন, 'What sort of people are you ?' তারপর.তিনি বিছানায় কাছে গিয়ে বেড়ালটার ঘাড় ধরে দূর করে দিলেন। তারপর হাসতে হাসতে সব ঠিক আছে কিনা জানতে চেয়ে শুভরাত্রি জানালেন। এক দারুণ স্বস্তির নিঃশ্বাস ফেলে তিনজন একযোগে শুভরাত্রি জানালেন।

যাইহোক, 1915 সালের পর 1916 সালেও রামানুজনের গবেষণাপত্র প্রকাশ হতে থাকে। 1916 সালে তাঁর প্রকাশিত প্রবন্ধের সংখ্যা হল তিনটি। দু'টি 'Messenger of Mathematics' -এ এবং একটি 'Transactions of Cambridge Philosophical Society'-তে প্রকাশিত হয়। ইংল্যাণ্ডে রামানুজনের কাজের অগ্রগতির প্রতিবেদন হার্ডি মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে 1916 সালে জুন মাসে পাঠালেন। তাতে তিনি লিখেছিলেন, 'India has produced many talented mathematicians and attained high academical distinction. They will be the first to recognize that Mr. Ramanujan's work is of different category.'

ইংল্যান্ডে অবস্থানকালে রামানুজনের গণিত-নিমগ্নতার উদাহরণ এক অনবদ্য দৃষ্টান্ত। তিনি যেন অন্য কিছুতে আনন্দ পান না। সবকিছু থেকে দূরে থাকেন। যখন 1916 সালের 'Eastern term'-এ হার্ডি, নেভিল ও ব্রার্ট্রান্ড রাসেল 'Trinity Sunday Essay Society'-র সদস্য হন, তখন রামানুজন কিন্তু তাতে নেই। যুদ্ধের সময় হার্ডি যখন টেনিস এবং ক্রিকেট নিয়ে অবসর সময় কাটান, তখন রামানুজন নিজের আবাসনে। ভারতীয় মজলিশেও তিনি উপস্থিত থাকেন না। নিজের গণিত সাধনা ছাড়া তিনি যেন নির্বিকার। যখন 1916 সালে 30শে অক্টোবর কেমব্রিজ ফিলোজফিক্যাল সোসাইটিতে দিওফান্তীয় সমীকরণ সংক্রান্ত রামানুজনের প্রবন্ধ পড়া হবে, তখন তা পড়বেন হার্ডি, রামানুজন নয়। আবার 1917 সালের 18ই জানুয়ারি হার্ডি ও রামানুজনের যৌথ প্রবন্ধ যখন লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটিতে হার্ডি উপস্থাপন করেন তখন সেখানে উপস্থিত থাকেন লিটলউড, নেভিল ও ব্রোমউইচ; কিন্তু অনুপস্থিত থাকেন রামানুজন। তিনি যেন বিশপ হোস্টেলের নিজের ঘরে নিজেকে স্বেচ্ছাবন্দী করে রেখে গণিত আরাধনার মধ্যে অনাবিল আনন্দ পেতে বেশি উৎসাহী।

এখানে বলা প্রয়োজন যে, রামানুজন হার্ডির মধ্যে পেয়েছেন— যথার্থ বন্ধু, হিতৈষী এবং শুভার্থীকে। সবচেয়ে বেশি যা পেয়েছেন তা হল 'intellectual companionship', যার অভাব তিনি ভারতবর্ষে তীব্রভাবে অনুভব করেছেন। প্রথম বিশ্বযুদ্ধ রামানুজনকে অন্যদের কাছ থেকে শিক্ষাগত সাহায্য থেকে বঞ্চিত করলেও, তিনি হার্ডির কাছ থেকে পেয়েছেন কাজ করার এক দারুণ আত্মবিশ্বাস। এখানকার কাজ তাঁকে স্বীকৃতি, সম্মান ও উপাধি এনে দেবার পথকে প্রস্তুত করে।

ইংল্যান্ডে পাঁচ বছর থাকার সময়ে রামানুজনের একুশটি গবেষণাপত্র প্রকাশিত হয়, এদের মধ্যে পাঁচটি হার্ডির সঙ্গে যৌথভাবে। তাছাড়া রামানুজনের পাঁচটি 'short notes' এবং আরো ছ'টি প্রবন্ধ প্রকাশিত হয় যথাক্রমে 'Records of Proceeding at the London Mathematical Society' এবং 'Journal of Indian Mathematical Society'-তে। উল্লেখ করা যেতে পারে, সারা জীবনে রামানুজনের মোট 37 টি গবেষণাপত্র প্রকাশিত হয়েছে যার মধ্যে 7টি হল হার্ডির সহযোগে। এই সব প্রবন্ধ জি এইচ হার্ডি, পি ভি সেশু আয়ার এবং বি এম উইলসনের সম্পাদনায় 'Collected papers of Srinivasa Ramanujan' নামে একযোগে প্রকাশিত হয়— প্রথম 1927 সালে 'Cambridge University Press'-এর দ্বারা এবং পরে 1962 সালে 'Chelsea'-এর দ্বারা। উল্লেখ্য, 1927 সালে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়, রয়েল সোসাইটি এবং ট্রিনিটি কলেজের আর্থিক আনুকূল্যে এ প্রকাশনা সম্ভব হয়েছিল।

ইংল্যান্ডে থাকার সময়কার প্রবন্ধগুলির বিষয়বস্তুর মধ্যে ছিল নির্দিষ্ট সমাকল (Definite Integral), মডিউলার সমীকরণ (Modular Equation), রিম্যান জিটা অপেক্ষক (Riemann Zeta Function), অসীম শ্রেণী (Infinite Series), শ্রেণীর সমষ্টি (Summation of series), বৈশ্লেষিক সংখ্যাতত্ত্ব (Analytic Number Theory), স্পর্শপ্রবণ সূত্রসমূহ (Asymptotic formulae), মডিউলার অপেক্ষক (Modular Function), বিভাজন তত্ত্ব (Theory of Partition), কম্বিন্যাটোরিয়েল অ্যানালিসিস (Combinatorial Analysis) উল্লেখযোগ্য। অতিমাত্রিক যৌগিকসংখ্যা নিয়ে প্রকাশিত প্রবন্ধটি হল রামানুজনের প্রকাশিত প্রবন্ধগুলির মধ্যে দীর্ঘতম। ইংল্যান্ডে থাকার সময় তাঁর লেখা প্রবন্ধগুলি অনুধাবন করলে গণিতে তার বিচরণের ক্ষমতা ও ব্যাপকতাকে চিনিয়ে দেবে। তবে এটা বলা প্রয়োজন যে, তাঁর কাজগুলিকে চেনার জন্য, জানার জন্য এবং বোঝার জন্য চাই উচ্চতর গণিতে যথেষ্ট জ্ঞান, অভিজ্ঞতা এবং ব্যুৎপত্তি। তাই তো জে আর নিউম্যান যথার্থই বলেছেন, 'He was a mathematician whom only first class mathematicians can follow.'

হার্ডির সঙ্গে যৌথভাবে লেখা প্রবন্ধগুলির মধ্যে দুটিকে 'অতি মহান কাজ' হিসাবে গণ্য করা হয়। এর প্রথমটি 1917 সালে লেখা হয় ; একটি পূর্ণ সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকের সংখ্যার মান সম্বন্ধে প্রবন্ধটি লেখা। বিস্ময়কর যে, যদিও সেই প্রাচীন গ্রিক সভ্যতার আমল থেকে মৌলিক সংখ্যা নিয়ে কয়েক শতাব্দী ধরে গবেষণা চলছে, তবুও এই প্রবন্ধটি হল একটি পূর্ণসংখ্যার মৌলিক উৎপাদকের সংখ্যা নিয়ে প্রথম নিয়মানুগ আলোচনা যা সম্ভাবনাতত্ত্ব ভিত্তিক সংখ্যা তত্ত্বের (Probabilistic Number Theroy) সৃষ্টির সহায়তা করে। অন্য মহান প্রবন্ধটি 1918 সালে প্রকাশিত হয়, যাতে বৃত্তীয় পদ্ধতি ব্যবহার করে n-এর বিভাজন সংখ্যা p(n)-এর জন্য স্পর্শপ্রবণ সূত্র (asymptotic formula) নির্ণয় করা হয়েছে। গণিতশাস্ত্রে এই প্রবন্ধটি এক অতি উচ্চ পর্যায়ের দারুণ কার্যকরী প্রবন্ধ হিসাবে বিবেচিত হয়।

ইংল্যান্ডে অবস্থান কালের রামানুজনের প্রবন্ধগুলির সৃজনশীলতা ও গভীরতা গণিতজ্ঞদের শুধু মুগ্ধ করে নি, রামানুজনের প্রতি এক গভীর শ্রদ্ধা ও সম্মানের ভাবকে উদ্রেক করেছে।

ইংল্যান্ডে আসার পর রামানুজনকে জানতে হলে হার্ডির শরণাপন্ন হতেই হবে। এ প্রসঙ্গে হার্ডি বলেছেন যে, ইংল্যান্ডে আসার পর রামানুজনের মন কিছুটা শক্ত এবং তাঁর গণিতজ্ঞান কিছুটা পোক্ত হলেও তিনি কখনো প্রচলিত রীতিতে বড়ো হয়ে ওঠা গোঁড়া গণিতজ্ঞ হয়ে ওঠেন নি। নূতন প্রেক্ষাপটে কাজ করতে যা নূতন কিছু

শিখতে শুধু আগ্রহী ছিলেন না, তা তিনি চমৎকারভাবে রপ্ত করতেন। তাই তাঁকে প্রচলিত পদ্ধতিতে শিক্ষা দেওয়া সম্ভব ছিল না। তিনি ধীরে ধীরে নূতন দৃষ্টিভঙ্গি রপ্ত করছিলেন। 'In particular he learnt what was meant by proof' এবং পরবর্তী কালে তা তাঁর প্রবন্ধে প্রতিফলিত হয়।

কিন্তু বিস্ময়কর হল, প্রমাণ সম্বন্ধে রামানুজনের ধারণা ছিল তাঁর নিজস্ব এক অদ্ভুত ধারার — কারের সংক্ষিপ্তসারের প্রভাবে বিশেষভাবে প্রভাবিত। এ সম্বন্ধে বলতে গিয়ে একবার লিটলউড লিখেছিলেন, '.... The clear-cut idea of what is meant by a proof, now-a-days so familiar as to be taken for granted, he (Ramanujan) perhaps did not possess at all. If a significant piece of reasoning occurred somewhere and the total mixture of evidence and intuition gave him certainty, he looked no further.'

ইংল্যান্ডে থাকার সময় প্রমাণ সম্বন্ধে তাঁর ধারণা ধীরে ধীরে কিছু পরিবর্তিত হলেও, তাঁর কাজের পদ্ধতি সম্বন্ধে বলতে গিয়ে হার্ডি বলেছেন যে, যাই হোক না কেন, রামানুজনের পদ্ধতি এবং হাতিয়ার মূলত একই রকম ছিল। তিনি লিখেছেন, 'One would have thought that such a formalist as Ramanujan would have revelled in Cauchy's Theorem. but he practically never used it.' কিন্তু তাঁর প্রথাগত প্রতিভার সবচেয়ে আশ্চর্যজনক প্রমাণ হল যে, তিনি ন্যূনতম ভাবেও ঐ উপপাদ্যের অভাব অনুভব করেন নি।

আর ভারতে করা রামানুজনের কাজের মধ্যে বড়ো অংশই হল পুনরাবিষ্কার, যার এক বড়ো তালিকা হয়তো প্রস্তুত করা যায়, কিন্তু তা কাজের হবে না বলে হার্ডি মন্তব্য করেছেন। কারণ, রামানুজন কখনো একটি উপপাদ্যের বা তার অংশের সন্ধান পেলেও প্রমাণ ছাড়াই তা উপস্থাপন করেছেন। কিন্তু অঙ্কশাস্ত্রে উপপাদ্যকে বোঝার জন্য প্রমাণের একান্ত প্রয়োজন। এ প্রসঙ্গে হার্ডি মন্তব্য করতে গিয়ে বলেছেন যে, এক অর্থে রামানুজন বৈশ্লেষিক সংখ্যা তত্ত্বে অনেক আবিষ্কার করেছেন, কিন্তু বিষয়টির আসল অসুবিধা বোঝা থেকে তিনি খুব দূরে ছিলেন। তাঁর কাজের কিছু কিছু অংশ বিশেষ করে উপবৃত্তীয় অপেক্ষক তত্ত্বের কোনো কোনো অংশ রহস্যাবৃত। তবে এ রহস্য হয়তো উন্মোচিত হত, যদি হার্ডি তা করতে চাইতেন। এটা কী করে পেলেন বা এটা কোথা থেকে লিখলেন বা কেলির (Cayley) বা গ্রিনহিলের (Greenhill) উপবৃত্তীয় অপেক্ষক সম্বন্ধে কতটা অবহিত ইত্যাদি প্রশ্ন করে হার্ডি রামানুজনের কাছে জানতে চাইলে হার্ডি তা জানতে পারতেন। কারণ, হার্ডি বলেছেন,

'Ramanujan was quite able and willing to give straight answer to a question and not in the least disposed to make mystry of his achivement.' কিন্তু হার্ডি তা করেন নি বা করতেও চান নি। তিনি আগে জানতেন না যে রামানুজন তাড়াতাড়ি মারা যাবেন। তাছাড়া নিজের ব্যক্তিগত প্রসঙ্গ, নিজের ইতিহাস এবং মনোবিজ্ঞান নিয়ে রামানুজনের এতটুকু আগ্রহও ছিল না। হার্ডি বলছেন যে, রামানুজন ছিলেন এমন এক গণিতজ্ঞ যিনি সব সময় কাজ নিয়ে ব্যস্ত এবং হার্ডি নিজেও একজন গণিতজ্ঞ। আর একজন গণিতজ্ঞের সঙ্গে যখন রামানুজনের সাক্ষাৎ হয়, তখন ঐতিহাসিক গবেষণা ছাড়া অনেক আকর্ষণীয় জিনিষ ভাবার বা বলার থাকে। সত্যিই 'It seemed rediculous to worry him (Ramanujan) about how he had found this or that known theorm, when he was showing me (Hardy) half a dozen new ones almost everyday.'

এখানে বলা দরকার যে, ইংল্যান্ডে করা রামানুজনের কাজ সম্পর্কে হার্ডি মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়কে একটি প্রতিবেদন পাঠান যাতে রামানুজনের বারোটি প্রবন্ধ সম্বন্ধে আলোচনা আছে। এটি আবার 1917 সালে ইন্ডিয়ান ম্যাথমেটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত হয়। হার্ডি প্রবন্ধগুলি সম্বন্ধে বেশ কিছু আলোচনা করেও বলেছেন যে, তাঁর এ আলোচনা অসম্পূর্ণ এবং খণ্ডিত। তবুও এ থেকে রামানুজনের আশ্চর্যজনক স্বকীয়তা ও অপূর্ব ক্ষমতা সম্বন্ধে অন্তত কিছুটা জানা যাবে। আলোচনার শেষে মন্তব্য হল, 'In him (Ramanujan) India now possesses a pure mathematician of first order, whose achievemnets suggest the brightest hopes for its scientific future.'

ইংল্যান্ডে থাকার সময়ে প্রথম তিন বছর রামানুজনের শরীর ভালোই ছিল। কোনো রকম অসুস্থতার লক্ষণ প্রকাশ পায় নি, যদিও তিনি সম্পূর্ণ নিরামিষ খাদ্য খেতেন আর প্রথম বিশ্বযুদ্ধের জন্য ইংল্যান্ডে তখন খাদ্যের অভাব চলছিল। এই সময়কালকে তাঁর জীবনের সবচেয়ে সফল ও সৃষ্টিশীল সময় হিসাবে চিহ্নিত করা যায়। কিন্তু দুর্ভাগ্য যে, তিনি 1917 সালের প্রথম দিকে অসুস্থ হয়ে পড়েন— বেশ গুরুতর ভাবে। তাঁর আয়ুর দ্রুত সংকোচনের যেন অশুভ সূচনা শুরু হল। রামানুজনের জীবনের নানা ঘটনা ও গাণিতিক কাজের রহস্যময়তার মতো তাঁর অসুস্থতা নিয়েও এক প্রহেলিকা বিদ্যমান। তাঁর অসুস্থতার সঠিক কারণ ও প্রকৃতি এবং অসুখের নাম ও উপসর্গ নিয়ে এখনও সবাই নির্দ্বিধায় এক মত হতে পারেন নি।

অসুস্থ হবার পর কোথায় কোথায় তাঁর চিকিৎসা হয়, তার একটা সংক্ষিপ্ত

বিবরণ দেওয়া যেতে পারে। 1917 সালের মে মাস থেকে পাঁচ মাস তিনি কেমব্রিজের নার্সিং হোস্টেলে ভর্তি ছিলেন। তারপর নানা টি বি স্যানেটোরিয়ামে ভর্তি হয়ে তাঁর সময় অতিবাহিত হতে থাকে। সামারসেটের মেনডিপ হিলস্-এ (Mendip Hills) 1917 সালের অক্টোবরের দু'তিন সপ্তাহের জন্য, ডার্বিশায়ারের ম্যাটলক হাউস-এ (Matlock House) 1917 সালের নভেম্বর থেকে 1918 সালের জুন পর্যন্ত, লন্ডনের ফিৎজরয় হাউস-এ (Fitzroy House) 1918 সালের জুন মাস থেকে ডিসেম্বর পর্যন্ত এবং পুটনির কলিনেট হাউস-এ (Colinette House) 1918 সালের ডিসেম্বরের শেষ থেকে 1919 সালে ভারতে যাত্রা করার আগে পর্যন্ত ছিলেন।

সাধারণ ভাবে অসুস্থতার প্রধান কারণ হিসাবে কঠোর পরিশ্রম এবং শরীরের প্রতি ঠিকমতো যত্ন না নেওয়াকে দাবি করা যায়। তাঁর অভ্যাস ছিল কখনো কখনো একসঙ্গে টানা ত্রিশ ঘণ্টা কাজ করে একসঙ্গে কুড়ি ঘণ্টা ঘুমানো। নিজের হাতে রান্না করে তিনি নিরামিষ খাবার খেতেন, সেই খাদ্যের মধ্যে কতটা খাদ্যগুণ, কতটা পুষ্টি এবং তা কতটা সুষম ছিল সে সম্বন্ধে ভাবার যথেষ্ট কারণ আছে। তাছাড়া তিনি রান্না করার সময়ের অভাবে এবং গণিতসাধনার বেশি মনোযোগ দেবার ফলে কখনো অর্ধাহারে, কখনো অনাহারে থাকতেন এবং খাবার সময়ের ব্যাপারে প্রাত্যহিক কোনো নির্দিষ্ট সূচীও মেনে চলতেন না।

তাছাড়া তাঁকে পরিচর্যা করার জন্য বা তাঁর খাওয়া-দাওয়ার ব্যাপারে যত্ন নেবার জন্য মা কোমলতা বা স্ত্রী জানকীর মতো কেউ ইংল্যান্ডে উপস্থিত ছিলেন না। তিনি ছিলেন এ ব্যাপারে নিঃসঙ্গ। ফলে নিঃসঙ্গতার একটা যন্ত্রণা ও অভাববোধ অজান্তেই তাঁর মনের উপর কাজ করে গেছে, গণিতসাধনার মধ্যে তিনি যতই নিবিষ্ট থেকে আনন্দ পান না কেন। এর উপর রয়েছে আবহাওয়ার এক প্রভাব। মাদ্রাজের নাতিশীতোষ্ণ আবহাওয়ার মধ্যে বড়ো হয়ে উঠে তিনি তখন ইংল্যান্ডের পুরো বিপরীত আবহাওয়া শীতলতার মধ্যে দিন কাটাচ্ছেন। সেই সঙ্গে ছিল যুদ্ধের জন্য খাদ্যাভাব। সব মিলিয়ে রামানুজনের দেহ ও মনের উপর এক অস্বাভাবিক চাপ, অনভ্যস্ত পরিবেশের তীব্র প্রভাব কাজ করেছিল।

রামানুজনের ক্ষয়রোগ হয়েছিল বলে প্রথমে ভাবা হয়েছিল। তাঁর এক জীবনীকার রঙ্গনাথও বলেছেন যে 1918 সালের শেষে এটা অবশ্যই জানা গিয়েছিল যে তিনি ক্ষয়রোগে আক্রান্ত। আধুনিক জীবনীকাররা অন্যান্য কারণ সম্বন্ধে জানালেও ক্ষয়রোগের পক্ষে বেশির ভাগ মত পাওয়া গেছে। এ ব্যাপারে রবার্ট ক্যানিগেল

বলেছেন যে, অনেকে মনে করেন রামানুজনের পেটে আলসার হয়েছিল। প্রতিদিনই রাত্রিবেলায় তাঁর জ্বর হত এবং শরীর দুর্বল থাকত। তবে কাশি বা থুথুর সঙ্গে রক্ত দেখা যেত না। সে জন্য ম্যাটলক হাউসের প্রধান চিকিৎসক ডাঃ কিনক্যাইড (Dr.Kincaid) ক্ষয়রোগ সম্বন্ধে সংশয় পোষণ করতেন। তাঁর অনুমান ছিল প্রাচ্যদেশের জীবাণুবাহিত কোনো এক অজানা রোগে রামানুজন আক্রান্ত হয়েছিলেন—যা নির্ণয় করার উপায় তখন জানা ছিল না। অনেকে রোগের কারণ হিসাবে রক্ত-দূষণকে দায়ী করেন। কেউ বা ভাবেন যথাযথ পুষ্টির অভাবে ভিটামিন B-12এর ঘাটতি হয়তো তাঁর মূল রোগ। এ মন্তব্য রিচার্ড আস্‌কে (Richard Askey) করেছেন। আর রামানুজনের অসুস্থতা প্রসঙ্গে আলোচনা করতে গিয়ে আর এ র‍্যানকিন (R.A.Rankin) 1984 সালে মন্তব্য করেছেন যে রামানুজনের অসুখ ঠিকমতো নির্ণীত হয় নি, তবে ক্ষয়রোগ তাঁর মৃত্যুর কারণ নয়। কারণ হিসাবে বলা হয়েছে যে, পরবর্তীকালে মাদ্রাজ এবং তার চারপাশের উষ্ণ আবহাওয়ায়ও রামানুজনের স্বাস্থ্যের কোনো উন্নতি পরিলক্ষিত হয় না ; বরং তিনি দিনে দিনে কঙ্কালসার দেহে পরিণত হচ্ছিলেন। অনেকে আবার মনে করেন যে 'hepatic amoebiasis'-এ তাঁর লিভার বা অন্ত্রের নিম্নাংশ আক্রান্ত হয়েছিল।

বিভিন্ন নার্সিং হোম বা স্যানেটোরিয়ামে থাকার সময় খাদ্য দিয়ে রামানুজনের সঙ্গে কর্তৃপক্ষের এক ঠান্ডা যুদ্ধ যেন চলেছিল। নার্সিং হোম বা স্যানেটোরিয়াম বলতে কী বোঝায় সে সম্বন্ধে রামানুজনের কোনো ধারণাই ছিল না। তাঁর জানা ছিল না যে, সেখানে ডাক্তারের পরামর্শ অনুযায়ী খাদ্য সরবরাহ করা হয়, রোগীর পছন্দ বা রুচি অনুসারে খাদ্য দেওয়া হয় না। রামানুজনের পছন্দ ছিল টক-ঝাল দক্ষিণ ভারতীয় খাদ্য, আবার যথার্থ নিরামিষ হওয়া চাই। ফলে ম্যাটলক হাউসে থাকার সময় কিছু সমস্যার উদ্ভব হয়। এখানকার খাবার সম্বন্ধে রামানুজনের অনুযোগ ছিল। তিনি একে এক অব্যবস্থা হিসাবে বিবেচনা করতেন। এ প্রসঙ্গে ইংল্যান্ডে অবস্থানকারী রামানুজনের এক বন্ধু এ এস রাম হার্ডিকে এক চিঠিও লেখেন। এ এস রামলিঙ্গম যিনি এ এস রাম হিসাবেই বিশেষভাবে পরিচিত, তিনি ছিলেন কুড্ডালোর থেকে পাশ করা ইঞ্জিনিয়ার। তিনি চার বছর ধরে ইংল্যান্ডে বসবাস করছিলেন। তিনি হার্ডিকে লেখেন যে, রামানুজনকে যথাযথ খাদ্য দেওয়া হচ্ছে না এবং নার্সরা তাঁর প্রতি ঠিকমতো যত্ন নিচ্ছে না। ম্যাটলকের স্বাস্থ্যনিবাসের ব্যবস্থা সম্বন্ধে ক্ষোভ জানিয়ে যেমন এ এস রাম হার্ডিকে চিঠি লেখেন, তেমনি তিনি রামানুজনকে স্বাস্থ্যের কারণে খাদ্যাভ্যাস পরিবর্তন করার জন্য অনুরোধ করেন। তিনি তাঁকে পরিজ, টমাটো,

কমলালেবু, পনির, মাখন, মারকনি প্রভৃতি খাবার খাওয়ার প্রস্তাব দেন।

ম্যাটলক হাউসের বিধিব্যবস্থায় অসন্তুষ্ট রামানুজন সেখান থেকে চলে যেতে চাইলেও তাঁর দুর্বল স্বাস্থ্যের জন্য অন্যত্র যাবার অনুমতি দেওয়া হয় নি। পরে 1918 সালের জুনের শেষে তাঁকে লন্ডনের ফিৎজরয় হাউসে নিয়ে আসা হয়। আর ইংল্যান্ডে তাঁর শেষ স্বাস্থ্য নিবাস হল পুটনির কলিনেট হাউস।

রামানুজনের রোগ ও চিকিৎসা সম্বন্ধে ডাঃ পি এস চন্দ্রশেখর আয়ারের ডায়েরিতে থাকা প্রতিবেদন উল্লেখের দাবি রাখে। শেষ সময়ে মাদ্রাজে রামানুজনের চিকিৎসক ছিলেন তিনি। তিনি লিখেছেন, 'অসুস্থতার প্রথম পর্যায়ে ইংল্যান্ডের চিকিৎসকরা ঠিকমতো রোগ নির্ণয় করতে পারেন নি এবং তার ফলে চিকিৎসা-বিভ্রাটও ঘটেছিল। অপুষ্টি এবং অত্যধিক পরিশ্রমের ফলে রামানুজনের ফুসফুস ক্ষয়রোগে আক্রান্ত হয়। তাঁর কাজ করার অদ্ভুত স্বভাব ও খাদ্যাভ্যাস অনেকখানি দায়ী। তিনি কখনো কখনো একটানা 30 ঘণ্টা গণিতচর্চা করতেন এবং তারপর 20 ঘণ্টা ঘুমোতেন। এ ছাড়া কেমব্রিজে এবং বিভিন্ন নার্সিং হোমে নিঃসঙ্গতা তাঁর মনের উপর চাপ সৃষ্টি করেছিল।'

এখানে বলা প্রয়োজন যে, বিভিন্ন স্বাস্থ্যনিবাসে রামানুজনের চিকিৎসার জন্য কম অর্থ ব্যয় হয় নি। কিন্তু অতি সাধারণ ভাবে জীবনযাত্রার ফলে তাঁর সঞ্চিত অর্থের দ্বারা তাঁর চিকিৎসার খরচ মেটাতে কোনো অসুবিধে হয় নি।

চিকিৎসার দ্বারা যেমন রামানুজনের দেহের উন্নতির চেষ্টা চলছিল, তেমনি চলছিল তাঁর মনকে সতেজ ও চাঙ্গা করার চেষ্টা। তাঁর প্রতিভার যাতে যথাযথ স্বীকৃতি পাওয়া যায়, সে ব্যাপারে হার্ডি নিরলস প্রয়াস চালাচ্ছিলেন।

স্বীকৃতির সাফল্যে রামানুজনের মন প্রফুল্ল হবে এবং মনের প্রফুল্লতা তাঁর শারীরিক উন্নতির সহায়ক হবে— এই ধারণা সুদৃঢ়ভাবে হার্ডির মনে গেঁথে গিয়েছিল। আর হার্ডির দৃঢ় প্রত্যয় ছিল যে, রামানুজনের অসাধারণ প্রতিভার যথাযথ স্বীকৃতির জন্য তাঁর এফ আর এস [F.R.S.(Fellow of Royal Society)] হিসাবে নির্বাচন একান্তভাবে প্রয়োজন। ফলে হার্ডি এ ব্যাপারে বেশ সক্রিয় হয়ে ওঠেন।

এফ আর এস সম্বন্ধে বলতে গেলে প্রথমে রয়েল সোসাইটির সম্বন্ধে কিছু বলতে হয়। রয়েল সোসাইটি হল 'Britain's preeminent scientific body' যা 1966 সালে ক্রিস্টোফার রেন (Christopher Wren) এবং রবার্ট বয়েলস-এর (Robert Boyles) প্রচেষ্টায় প্রতিষ্ঠিত হয়। আর এফ আর এস হল বৈজ্ঞানিক

কৃতিত্বের চরম স্বীকৃতি। 'Younger scientists lusted for it (FRS) and older scientists lamented their lack of it.'

রয়েল সোসাইটির ফেলো হিসাবে নির্বাচনের জন্য উদ্দিষ্ট ব্যক্তির নাম ও পদবী বা পদ, পেশা, বাসস্থান উল্লেখ করে তাঁর যোগ্যতাকে 250 শব্দের মধ্যে বর্ণনা করে নির্দিষ্ট আবেদন পত্র জমা দিতে হয়, যাতে নিজ নিজ ক্ষেত্রে বিশিষ্ট কয়েকজনকে প্রস্তাবক এবং সমর্থক হিসাবে স্বাক্ষর করতে হয়। রামানুজনের জন্য প্রস্তাব ও সুপারিশ করে যাঁরা স্বাক্ষর করেছিলেন, তাঁদের নাম বিশেষভাবে উল্লেখের দাবি রাখে। সাধারণ জ্ঞান থেকে (From General Knowledge) তিন জনের এবং ব্যক্তিগত জ্ঞান থেকে (From Personal Knowledge) দশ জন মিলে মোট তেরো জনের স্বাক্ষর ছিল। প্রস্তাবক হিসাবে জি এইচ হার্ডি এবং সমর্থক হিসাবে পি এ ম্যাকমোহন (P. A. MacMohan) স্বাক্ষর করেছিলেন— ব্যক্তিগত স্তম্ভের যথাক্রমে প্রথম এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি হিসাবে। মজা হল, এই স্তম্ভে অন্যান্য বিশিষ্ট ব্যক্তির মধ্যে এমন দু'জনের স্বাক্ষর ছিল যা আমাদের বিস্ময়ের উদ্রেক করে। এঁরা হলেন ই ডব্লু হবসন (ষষ্ঠ) এবং এইচ এফ বেকার (সপ্তম) যাঁদের কাছে রামানুজন ভারতে থাকার সময় চিঠি পাঠিয়ে কোনো সাড়া পান নি। তাছাড়া এ স্তম্ভে যে সব প্রখ্যাত ব্যক্তির স্বাক্ষর ছিল তাঁরা হলেন জে এইচ গ্রেস (J.H. Grace) (তৃতীয়), জোসেফ লারমর (Joseph Larmor) (চতুর্থ), টি জে ব্রোমউইচ (পঞ্চম), জে ই লিটলউড (অষ্টম), জে ডব্লু নিকলসন (J.W. Nicholson) (নবম) এবং ডব্লু এইচ ইয়ং (W.H. Young) (দশম)। আর সাধারণ জ্ঞান স্তম্ভের স্বাক্ষরকারীরা হলেন যথাক্রমে ই টি হুইট্যাকার (E.T. Whittakar), এ আর ফরসিথ (A.R.Forsyth) এবং এ এ হোয়াইহেড্ (A.N. Whitehead)। উল্লেখ্য, এই তেরোজনের মধ্যে মেজর ম্যাকমোহন ছাড়া প্রত্যেকেই কেমব্রিজের ম্যাথমেটিক্যাল ট্রাইপোজের র‍্যাঙ্গলার, যাঁদের মধ্যে ছয় জনই সিনিয়র র‍্যাঙ্গলার (প্রথম স্থানাধিকারী)।

এফ আর এস -এর জন্য দেওয়া রয়েল সোসাইটির ছাপানো আবেদনপত্রটি হাতে লিখেই পূরণ করা হয়েছিল এবং হাতের লেখাটি অধ্যাপক হার্ডির বলে মনে হয়। নাম ও পদবী বা পদের জায়গায় লেখা ছিল শ্রীনিবাস রামানুজন। পরের লাইনে পেশার জায়গায় লেখা ছিল 'Research student in Mathematics.' সাধারণ বাসস্থানের (Usual place of residence)-এর জায়গায় লেখা ছিল ট্রিনিটি কলেজ, কেমব্রিজ। আর যোগ্যতা বর্ণনা করার জায়গায় যা লেখা ছিল তার কিছুটা হল, 'Distinguished as pure mathematician particularly for his investigations in elliptic functions and theroy of numbers. Author of following papers, amongst others :' তারপরই রামানজুনের পাঁচটি প্রবন্ধ এবং হার্ডির সহযোগে যৌথভাবে চারটি প্রবন্ধের নাম উল্লেখ করা হয়।

আবেদনপত্রটি 1917 সালের 18ই ডিসেম্বর রয়েল সোসাইটিতে জমা দেওয়া হয় এবং তা 1918 সালের 24শে জানুয়ারি সোসাইটির মিটিংয়ে পড়া হয়। রামানুজনের সঙ্গে আরো 103 জনের নাম পড়া হয়, যাঁদের মধ্য থেকে মাত্র কয়েকজন এফ আর এস হিসাবে নির্বাচিত হবার সৌভাগ্য অর্জন করবেন। কারা নির্বাচিত হবেন সে সম্বন্ধে রয়েল সোসাইটির আরো দুটি মিটিং-এ আলোচনা করা হয়। অবশেষে 1918 সালের 28শে ফেব্রুয়ারির রয়েল সোসাইটির মিটিংয়ে চূড়ান্ত নির্বাচন করা হয়— 104 জনের মধ্যে পনেরো জন ফেলো হিসাবে নির্বাচিত হন এবং রামানুজন এঁদের মধ্যে একজন। পরবর্তী সময়ে 'Nature' পত্রিকায় নামগুলি প্রকাশিত হয়। 1918 সালের 2রা মে'র পরে রামানুজনের নামের শেষে এফ আর এস লেখার আনুষ্ঠানিক স্বীকৃতি মেলে। রামানুজন হলেন প্রথম ভারতীয় গণিতজ্ঞ যিনি এই উপাধিতে ভূষিত হন। তাঁর আগে 1841 সালে শুধু স্যার আর্দেসির কার্সেজি (Sir Ardeseer Cursetjee) নামে একজন ইঞ্জিনিয়ার ও জাহাজ নির্মাতা ভারতীয় হিসাবে এফ আর এস হয়েছিলেন।

রামানুজনের সহযোগী হার্ডি ও লিটলউড দু'জনেই এফ আর এস। তবে 1910 সালে যখন হার্ডি এফ আর এস হন তখন তাঁর বয়স ছিল তেত্রিশ এবং 1917 সালে যখন লিটলউড এফ আর এস হন তখন তাঁর বয়সও তেত্রিশ। কিন্তু রামানুজন যখন এফ আর এস হলেন তখন তাঁর বয়স ছিল ঊনত্রিশ। রামানুজনের ঊনত্রিশ বছরে এফ আর এস হবার পিছনে হার্ডির সক্রিয়তার কথা বলতে হয়। রামানুজন যে এফ আর এস হবেন সে বিষয়ে হার্ডি ও লিটলউডের মতো অনেকেই নিশ্চিন্ত ছিলেন, হয়তো বা কিছু সময়ের ব্যবধানে। কিন্তু রামানুজনের স্বাস্থ্য নিয়ে হার্ডির দুশ্চিন্তা যেন তাঁকে তাড়া দিচ্ছিল। তিনি দ্রুততার সঙ্গে বেশ সক্রিয় হলেন। তখনকার রয়েল সোসাইটর সভাপতি ছিলেন 1906 সালে পদার্থবিজ্ঞানে নোবেল পুরস্কার বিজয়ী বিশিষ্ট বিজ্ঞানী তথা ইলেকট্রনের আবিষ্কারক জে জে থমসন (J.J. Thomson)। হার্ডি রামানুজন সম্বন্ধে সব জানিয়ে থমসনকে চিঠি লেখেন। রামানুজনের যোগ্যতা প্রসঙ্গে বলতে গিয়ে চিঠির এক জায়গায় লিখেছিলেন, 'There is an absolute gulf between him (Ramanujan) and other mathematical candidates'. রামানুজনের স্বাস্থ্যের যা অবস্থা তাতে তাঁকে সম্মান

দিতে দেরি করলে যা হতে পারে সে সম্বন্ধে হার্ডির মন্তব্য হল, 'The society would have to live for ever with its failure to hônour him.' তাই রামানুজনের শারীরিক অবস্থার কথা ভেবে তিনি এও লিখলেন, 'It would make him feel that he was success and that it was worthwhile going on trying.' তাছাড়া এ সম্মান তাঁর স্বাস্থ্যোদ্ধারের সহায়ক হবে।

রামানুজনের বিভিন্ন সম্মানপ্রাপ্তির কথা এখানে উল্লেখের দাবি রাখে। 1916 সালে রামানুজনের টিউটর বার্নেস মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ে লিখেছিলেন যে, তাঁর ধারণা রামানুজন 1917 সালের অক্টোবরে গণিতকীর্তির স্বীকৃতি হিসাবে ট্রিনিটি কলেজের ফেলো হিসাবে নির্বাচিত হবেন। কিন্তু তা 1918 সালের ফেব্রুয়ারিতেও হল না। ঘটনাটা রামানুজনকে কিছুটা মুষড়ে দিয়েছিল ; যদিও ম্যাটলকে অবস্থান কালে 1917 সালের 6ই ডিসেম্বর তিনি লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির সদস্য হিসাবে নির্বাচিত হয়েছিলেন এবং 1918 সালের 18ই ফেব্রুয়ারি তিনি কেমব্রিজ ফিলোজফিক্যাল সোসাইটির (Cambridge Philosophical Society) সদস্য হিসাবে নির্বাচিত হন। তিনি ম্যাটলক হাউসে এতটা হতাশাগ্রস্ত ছিলেন যে যখন হার্ডি তাঁর এফ আর এস হওয়ার সংবাদ টেলিগ্রাম করে জানালেন, তখন তিনি প্রথমে বুঝতেই পারেন নি যে, তিনি রয়েল সোসাইটির ফেলো হিসাবে নির্বাচিত হয়েছেন। রামানুজন টেলিগ্রামটি একবার নয়, দু'বার নয়, তিনবার পড়লেন। তিনবার পড়েও আসল খবর বুঝতে না পেরে তিনি ভাবতে থাকলেন কেন পিকাডিলি থেকে হার্ডি কেমব্রিজ ফিলোজফিক্যাল সোসাইটির ফেলো নির্বাচন হবার খবর টেলিগ্রাম করে জানিয়েছেন। কিছু সময় নিল আসল খবর উপলব্ধি করার জন্য। 'It is only after sometimes that I (Ramanujan) read your telegram correctly' বলে রামানুজন হার্ডিকে লিখেছিলেন।

রামানুজন যখন হতাশাগ্রস্ত ছিলেন তখনকার তাঁর মানসিক অবস্থার কথা একটা ঘটনার মধ্যে পাওয়া যেতে পারে। তাঁর মন এতই নিরাশ অবস্থায় ছিল যে 1918 সালের জানুয়ারি বা ফেব্রুয়ারির কোনো এক দিন তিনি আগুয়ান্ এক ট্রেনের সামনে ঝাঁপিয়ে পড়ে আত্মহত্যার চেষ্টা করেন। কিন্তু আশ্চর্যজনক ভাবে তিনি রক্ষা পেয়ে যান। একজন রেলের গার্ড রামানুজনকে এভাবে ঝাঁপ দিতে হঠাৎ দেখে ফেলায় ট্রেনটা রামানুজনের কয়েক ফুট সামনে থামানো সম্ভব হয়। তবে স্কটল্যান্ড ইয়ার্ডের পুলিশেরা তাঁকে আত্মহত্যা করার চেষ্টার অভিযোগে গ্রেপ্তার করে। পরে হার্ডির হস্তক্ষেপে তিনি মুক্ত হন। রামানুজন সম্বন্ধে সব কিছু জানার পর ভারপ্রাপ্ত

বলেছিলেন, 'We in Scotland Yard did not want to spoil (his) life.' তবে রামানুজনের হতাশা ও নৈরাশ্যের প্রেক্ষাপটটা জানা দরকার। স্ত্রী জানকী দেবীর প্রতি রামানুজনের এক আন্তরিক টান ছিল। গণিত তাঁর আনন্দ, অনুভূতি, তৃপ্তি ও শান্তির স্থল হলেও জানকী দেবীর সঙ্গে তাঁর আত্মিক সম্পর্ক তাঁকে কাছে টানত। তাই জানকী দেবীর চিঠি ও সংবাদের প্রত্যাশার সব সময় তিনি অপেক্ষায় থাকতেন। অন্যদের কাছে জানকী দেবীর কথা বলতে গেলে 'my house' হিসাবে সম্বোধন করতেন। দীর্ঘদিন ধরে রামানুজনের 'my house'-এর চিঠি নেই। ট্রিনিটি কলেজের ফেলো হিসাবে নির্বাচন হওয়া তখনও তাঁর করায়ত্ত হয় নি। স্যানেটোরিয়ামে অসুস্থ হয়ে এবং অন্যের উপর নির্ভরশীল হয়ে দিনযাপনের গ্লানি ভোগ করতে হচ্ছে। নিজের পছন্দমতো খাবার থেকে বঞ্চিত। বন্ধুদের প্রত্যাশা মতো গাণিতিক সৃষ্টি যেন তাঁর দ্বারা আর সম্ভব হচ্ছে না বলে তিনি ভাবতে থাকেন। এই সব মিলিয়ে এক অসহনীয় মানসিক যন্ত্রণা ও তীব্র হতাশাবোধ তাঁকে আত্মহত্যায় প্ররোচিত করে।

যাই হোক, অবশেষে রামানুজন এফ আর এস হিসাবে নির্বাচিত হলেন। হার্ডির চিঠির মাধ্যমে ভারতে খবর পৌঁছল। সবাই খুব খুশি। ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটি, ম্যাথেম্যাটিক্যাল এসোসিয়েশন অফ মাদ্রাজ প্রেসিডেন্সি কলেজ এবং মাদ্রাজ খ্রিষ্টান কলেজ রামানুজনকে অভিনন্দন জানাল।

1918 সালের 10ই অক্টোবর ট্রিনিটি কলেজ রামানুজনকে ফেলো হিসাবে নির্বাচিত করল। তিনিই হলেন প্রথম ভারতীয় যিনি এ সম্মানে ভূষিত হন। এই নির্বাচনের জন্য তিনি কোনো শর্ত ছাড়া এবং কোনো কাজের দায়িত্ব ছাড়া ছয় বছরের জন্য বার্ষিক 250 পাউন্ড হিসাবে ফেলোশিপ পাওয়ার অধিকারী হলেন।

কিন্তু এই ফেলো হিসাবে নির্বাচন ঘিরেও কাহিনী আছে যা সামাজিক প্রেক্ষাপটে কম তাৎপর্যপূর্ণ নয়। টিউটর বার্নেসের আশানুসারে যখন 1917 সালে ট্রিনিটি কলেজের ফেলো হিসাবে রামানুজনের নির্বাচন হল না, তখন 1918 সালে সে প্রয়াস চলল। রামানুজনের নামের সঙ্গে হার্ডির নাম অতি ঘনিষ্ঠভাবে যুক্ত এবং ট্রিনিটির রাজনীতির ঝামেলায় তিনি জড়িত। তাই এই প্রয়াসে তাঁর বদলে লিটলউড এগিয়ে এলেন। কিন্তু 'racial issue' মাথাচাড়া দিল। এমন কি একজন প্রকাশ্যে ঘোষণা করলেন কোনোমতেই একজন 'black man'কে ফেলো হিসাবে গ্রহণ করা হবে না। নির্বাচনের বিরুদ্ধে যুক্তি খাড়া করা হল। বলা হল, রামানুজনের মানসিক অবস্থা সুস্থ নয়; কারণ তিনি আত্মহত্যার চেষ্টা করেছেন। লিটলউড রামানুজনের মানসিক সুস্থতা ও সমৃদ্ধতার সপক্ষে দুটি মেডিক্যাল সার্টিফিকেট জমা দিয়ে রামানুজনের

ফেলোশিপের জন্য সওয়াল করে চিঠি দিলেন। ফলে কেবলমাত্র মেধাকে ভিত্তি করে ফেলো নির্বাচনের ব্যাপারে অগ্রসর হতে হল। সবচেয়ে বড়ো যুক্তি হল, তিনি একজন এফ আর এস এবং 'For a fellow of Royal Society to be denied a Trinity fellowship would be a scandal'। অতএব ট্রিনিটির ফেলো হিসাবে নির্বাচন আটকানো গেল না।

হার্ডি মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়কে রামানুজনকে এই ফেলোশিপ পাওয়ার কথা জানালেন। তিনি লিখলেন, 'He will return to India with scientific standing and reputation such as no Indian has enjoyed before. and I am confident that India will regard him as the treasure he is.' কোনো রকম চিন্তা-ভাবনা ছাড়া রামানুজন যাতে গবেষণায় পুরোপুরি আত্মনিয়োগ করার সুযোগ পান, তার জন্য একটা পাকাপাকি ব্যবস্থা কথাও বললেন। মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় এতে সাড়া দিতে দেরি করল না ; 1919 সালের পয়লা এপ্রিল থেকে পাঁচ বছরের জন্য 250 পাউন্ড বার্ষিক বৃত্তি হিসাবে মঞ্জুর করল। সেই সঙ্গে রামানুজনের এই সময়ের মধ্যে ফিরে আসা এবং প্রয়োজনে ইংল্যান্ডে যাতায়াতের খরচ বহন করার ব্যবস্থা বহাল রইল।

এই সব সম্মান পাওয়ার ফলে রামানুজন শরীর ও মন অনেকটা প্রভাবিত হল। 1918 সালের শরৎকাল নাগাদ চিকিৎসায় রামানুজনের উন্নতি দেখা দিতে থাকে। তাছাড়া নূতন সৃষ্টির আনন্দে তাঁর গবেষণা গতি পেল। সম্মান পাওয়ার সুফলের কথা জানা যায় শ্রীনিবাস রাও-এর মন্তব্যে। তিনি বলেন, 'These awards acted as great incentives to Ramanujan who discovered some of the most beautiful in mathematics subsequently.'

রামানুজন শারীরিকভাবেও বেশ এক ভালো লাগা অনুভব করতে থাকেন। হার্ডি ডেউসবারিকে লিখলেন যে, রামানুজন 'On the road to real recovery.' এই সময় রামানুজনের গুণগ্রাহী ও শুভানুধ্যায়ীদের পরামর্শে হার্ডি রামানুজনকে স্বদেশে পাঠাবার ব্যবস্থা করলেন। কারণ, স্বদেশে পরিচিত আবহাওয়া ও পরিবেশ, নিকট আত্মীয়স্বজনের সান্নিধ্য ও সাহচর্য এবং নিজের জন্মভূমির ছোঁওয়া পেয়ে তিনি সুস্থ হয়ে উঠতে পারবেন। তাছাড়া দীর্ঘ সমুদ্রযাত্রার ধকল সইবার মত ক্ষমতা তখন তিনি লাভ করেছেন। ফলে 1919 সালের 27শে ফেব্রুয়ারি রামানুজন এস এস নাগোয়া (S.S. Nagoya) জাহাজে করে স্বদেশ অভিমুখে যাত্রা করলেন। ●

স্বদেশে শেষ জীবনে

নাগোয়া জাহাজে একমাস সমুদ্রযাত্রার পর 1919 সালে 27শে মার্চ রামানুজন বোম্বাই (অধুনা মুম্বাই) বন্দরে এসে পোঁছোলেন। যখন তিনি জাহাজ থেকে নামলেন তখন দেখলেন তাঁকে নিয়ে যাবার জন্য সেখানে উপস্থিত মা কোমলতাম্মল এবং ভাই লক্ষ্মী নরসিংহ। কিন্তু স্ত্রী জানকী অনুপস্থিত। জানকীকে না দেখতে পেয়ে রামানুজন জানতে চাইলেন—জানকী কোথায়। আসলে জানকী যে সেই মুহূর্তে কোথায়, তা কোমলতারও জানা নেই। তিনি বাপের বাড়ী রাজেন্দ্রমে অথবা মাদ্রাজে দিদির কাছে থাকতে পারেন। বাস্তবিকই বেশ কিছুদিন ধরে শ্বশুরবাড়ির সঙ্গে বাপের বাড়ির সম্পর্ক ভালো যাচ্ছিল না। দীর্ঘ এক বছর ধরে দু'টি পরিবারের মধ্যে কোনো যোগাযোগ নেই। কিন্তু এই পারিবারিক অসদ্ভাব ও কলহ রামানুজনের জীবনে বেশ প্রভাব ফেলেছিল। ইংল্যান্ডে থাকার শেষের দিকে চিঠির উত্তর না পেয়ে রামানুজন নিজের লেখা চিঠি ফেরত পেয়েছেন। বলা যেতে পারে 'Domestic conflicts had sabotaged his last three years in England. Now they dampened his arrival in India.'

জানকী অসুস্থ বাবাকে দেখতে গেছে জাতীয় উত্তর দিয়ে কোমলতাম্মল ছেলেকে প্রবোধ দেবার চেষ্টা করলেন আর এ দিকে জানকীকে রামানুজনের স্বদেশে ফিরে আসার খবর জানিয়ে এবং মাদ্রাজে রামানুজনের সঙ্গে দেখা করার কথা বলে, একই রকম চিঠি দু'জায়গায় পাঠালেন।

রামানুজন বোম্বাই থেকে ট্রেনে করে মাদ্রাজে এসে পৌছেলেন 1919 সালের দোসরা এপ্রিল। তাঁকে দেখতে বন্ধু-বান্ধব, শুভানুধ্যায়ীরা এলেন। কিন্তু রামানুজনের শারীরিক অবস্থা দেখে তাঁরা হতাশ। তখনকার তাঁর শরীরের হাল দেখে রামচন্দ্র রাও বলেছিলেন, 'I foresaw the end.' রামচন্দ্র রাও-এর প্রথম দেখা উজ্জ্বল চোখ নিয়ে বেঁটে খাটো মোটাসোটা চেহারার যুবকের মধ্যে তখন তিনি অতি শীর্ণ এক রোগীকে দেখলেন, যদিও চোখ দুটির মধ্যে সেই দারুণ ঔজ্জ্বল্য বর্তমান। রামানুজনের তখনকার মানসিক অবস্থাও ভাল নয়। তখনও স্ত্রী জানকী এসে পৌঁছোন নি ! ট্রেন থেকে নেমে তিনি দু চাকার ঘোড়ার গাড়িতে করে মাইলাপুরের এডওয়ার্ড ইলিয়ট্স রোডে অবস্থিত এক ধনী আইনজীবী পি আদিনারায়ণ চেট্টির 'সত্যাগ্রহ' নামক বাংলোতে উঠলেন।

রামানুজন যখন ইংল্যান্ডে গিয়েছিলেন তখন তিনি ছিলেন একজন অতি সাধারণ ব্যক্তি। কিন্তু ইংল্যান্ড থেকে ফিরে এলেন এমন বৈজ্ঞানিক কীর্তি ও স্বীকৃতি নিয়ে যা আগে কোনো ভারতীয় লাভ করেন নি। তাই তাঁর স্বদেশে ফিরে আসার পর সবার মধ্যে এক দারুণ সাড়া জাগাতে পেরেছিল। ফিরে আসার প্রায় সঙ্গে সঙ্গে ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির সদস্যরা তাঁদের পয়লা এপ্রিলের সভায় একটি প্রস্তাব গ্রহণ করে তাঁকে সাদর অভ্যর্থনা জানালেন। প্রস্তাবের শেষ অংশে লেখা ছিল, 'We extend our most cordial welcome to him and most fervently pray that he may be soon restored to his full vigour to procecute his glorious work in the scientific world.' পরবর্তী কালের এক সভায় রামানুজনকে সোসাইটির মাননীয় সদস্য রূপেও নির্বাচন করা হয়। তাছাড়া মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় থেকে তাঁকে অধ্যাপকের পদে যোগ দিতে আহ্বান করা হলে তিনি সুস্থ হয়ে তা গ্রহণ করবেন বলে সম্মতি দেন।

সত্যাগ্রহে থাকার সময় অনেক গুণগ্রাহী, শুভানুধ্যায়ী, বন্ধু-বান্ধব ও আত্মীয়-স্বজন আসতেন রামানুজনকে দেখতে। রামানুজনের তখনকার চিকিৎসক ডাঃ এম সি নন্‌জুদা রাও-এর পরামর্শ হল দর্শনার্থীদের ভীড় থেকে রামানুজনকে দূরে রাখতে হবে। ফলে তাঁকে মাইলাপুরের লাজ চার্চ রোডের 'ভেঙ্কট-ভিলাসে' নিয়ে যাওয়া হল। সেখানে 6ই এপ্রিল জানকী তাঁর ভাই আর শ্রীনিবাস আয়েঙ্গারের সঙ্গে এসে রামানুজনের সঙ্গে মিলিত হলেন। প্রায় তার এক সপ্তাহ পরে রামানুজনের বাবা, ঠাকুরমা ও ছোটোভাই কুম্ভকোনম থেকে মাদ্রাজে এলেন— তাঁর সঙ্গে দেখা করতে।

ভেঙ্কট- ভিলাসে রামানুজন তিন মাস ধরে থাকলেন। সঙ্গে আছেন জানকী। তাঁর সেবা, যত্ন ও সাহচর্য রামানুজনের মনে প্রভাব ফেলে। দু'জনের মধ্যে নৈকট্যের সম্পর্কের যেন আনুষ্ঠানিক উদ্বোধন ঘটল। যখন রামানুজন ইংল্যান্ড যান, তখন জানকী ছিলেন তেরো বছরের। এখন তাঁর বয়স আঠারো। দু'জনে নিজেদের মধ্যে সুখ-দুঃখ, আনন্দ-বেদনার কথা বলেন। তাঁরা এখন বুঝতে পারলেন রামানুজনের ইংল্যান্ডে অবস্থানের শেষ সময়ে কীভাবে তাঁদের চিঠি মাঝপথে পথভ্রষ্ট হয়েছিল। রামানুজনের শরীরের অবস্থা দেখে জানকীর কষ্ট হয়। জীর্ণ শীর্ণ রামানুজনের কাশি তাঁকে বিচলিত করে। ইংল্যান্ড থেকে ফিরে রামানুজন যেন অনেক পাল্টে গেছেন। আগেকার মতো পছন্দের খাদ্যেও তেমন রুচি নেই। শারীরিক অবস্থারও কোনো উন্নতি নেই।

যখন গ্রীষ্মকাল প্রায় এসে গেল, তখন রামানুজনকে মাদ্রাজের উষ্ণতা ও

আর্দ্রতা থেকে দূরে রাখার জন্য ডাক্তার উপদেশ দিলেন। শীতলতর জায়গার খোঁজ চলল। তাঁকে কাবেরী নদীর তীরে অবস্থিত 'কোড়ুমুড়ি' নামক গ্রামে নিয়ে আসা হল এবং সেখানে বিশ্ববিদ্যালয়ের ব্যবস্থাপনায় এক বাড়িতে রাখা হল।

কোড়ুমুড়িতে থাকার সময় মার একান্ত বাধ্য ছেলে রামানুজন কিন্তু প্রকাশ্যে মার সিদ্ধান্তের বিরুদ্ধে একবার বিদ্রোহ করলেন। 1919 সালের 11ই আগষ্ট ছিল 'শ্রাবণম্' অনুষ্ঠান— বার্ষিক পবিত্র উপবীত পরিবর্তনের অনুষ্ঠান। অনুষ্ঠানের অঙ্গ হিসাবে রামানুজন কাবেরীর জলে স্নান করতে যাবেন। জানকী তাঁর সঙ্গে যেতে চাইলেন। রামানুজন সম্মতি দিলেও কোমলতাম্মল নিষেধ করলেন। তিনি বললেন, 'না, ও যাবে না।' রামানুজন কিন্তু বললেন, 'হ্যাঁ,' এবং তিনি শ্রদ্ধাবনতভাবে অথচ দৃঢ়ভাবে বললেন, 'জানকী আমার সঙ্গে যাচ্ছে।'

এই সামান্য ঘটনার মধ্যে কিন্তু এক বিশেষ তাৎপর্য লুকিয়ে আছে এবং এ ঘটনা রামানুজনের জীবনে এক বিশেষ প্রভাব বিস্তারও করেছে। ক্যানিগেলের বর্ণনায় তা ধরা যেতে পারে, 'It was a turning point. All the hostility pent up over the past few years, the diverted letters, the endless quarrels— and now this. .... After that Janaki began to occupy a larger place in her husband's life. He grew freer in her company.'

তিনি একাধিবার জানকীকে বলেছেন 'তুমি যদি ইংল্যান্ডে আমার সঙ্গে যেতে, তাহলে আমি হয়তো অসুস্থ হয়ে পড়তাম না।' ধীরে ধীরে জানকীর উপর অনেক দায়িত্ব এসে গেল। সেবা যত্ন করা ছাড়াও রামানুজনকে ঔষধপত্র খাওয়ানোর কাজেও জানকী নিজেকে যুক্ত করলেন। এক সময় জানকীকে তাঁর বাপের বাড়িতে পাঠানোর জন্য কোমলতাম্মল বললেও রামানুজন তাতে অসম্মত হলেন।

কোড়ুমুড়িতে রামানুজনের প্রায় দু'মাস অবস্থানের সময় প্রতি রবিবার ডিভিশন্যাল মেডিক্যাল অফিসার সি এফ ফিয়ারন্সাইড (C.F. Fearnside) রামানুজনকে দেখতে আসতেন। এখানে থাকার পরও রামানুজনের স্বাস্থ্যের কোনো উন্নতি না দেখে তিনি একবার তাঁকে কোয়েম্বাটুর পাঠাতে বললেন। আর একবার বললেন 'তাঞ্জাভুর' পাঠাতে। 'তাঞ্জাভুর' শব্দটি রামানুজনের কানে গেল। তিনি 'তাঞ্জাভুর' শব্দটিকে তিনটি ভাগে অর্থাৎ 'তান্ সা ও ভুর' ভাগ করে জানকীকে বললেন, 'ওরা আমাকে তান্-সা-ভুর'-এ নিয়ে যেতে চাইছে'; আর 'তান্-সা-ভুর' এর তামিলে অর্থ হচ্ছে 'আমার মৃত্যুর স্থান'।

যাই হোক, পরে তাঁকে কুম্ভকোনমে নিয়ে আসা হয়। এর আগে তিনি কিছুদিন কোয়েম্বাটুরে ছিলেন। 1919 সালের তেসরা সেপ্টেম্বর তাঁরা কুম্ভকোনমের দিকে যাত্রা করলেন। সেখানে এসে তাঁকে ভক্তিপুরী সান্নিধি স্ট্রিটের একটি বাড়িতে রাখা হল। তখন রামানুজনদের নিজেদের বাড়িতে মেরামতির কাজ চলছিল। এখানে এসে তিনি তাঁর বাল্যকালে স্মৃতি-বিহ্বলতায় আবিষ্ট হলেন। অনেকের কথা মনে পড়ে। প্রায় কুড়ি বছর আগে চেনা এক বৃদ্ধার খোঁজ করেন, যিনি তাঁর পুরোনো এক সহপাঠীর কাকিমা। রামানুজনের শারীরিক অবস্থা তখন একদম ভালো নয়। তাঁর এক বন্ধুর ভাষায় রামানুজন তখন শুধু 'a bundle of bones.'

কুম্ভকোনমে থাকার সময় তাঁকে দেখানোর জন্য বিশিষ্ট চিকিৎসক ডাঃ পি এস চন্দ্রশেখর আয়ারকে মাদ্রাজ থেকে আনা হল। তিনি এক ঘণ্টারও বেশি সময় পরীক্ষা করলেন। তাঁর রায় হল— ক্ষয়রোগ। এই প্রসঙ্গে রামানুজন এক বন্ধুকে রসিকতা করে বলেছিলেন, 'আমার একজন বন্ধু আছে যে তোমাদের সকলের চেয়ে আমাকে বেশি ভালোবাসে, আদৌ যে আমাকে ছাড়তে চায় না। সে হল এই ক্ষয়রোগের জ্বর।'

রামানুজন যখন নাগোয়া জাহাজে করে ভারতে ফিরে আসছিলেন তখন হার্ডির মনে রামানুজনের আরোগ্যের ব্যাপারে যথেষ্ট উচ্চ আশা ছিল। কিন্তু আশা দিয়ে ভবিতব্যকে আটকানো যায় না। বাস্তব অতি রূঢ়। গত দু'বছরে রামানুজনের ক্ষয়রোগকে সারানো যায় নি। আর দেখা গেছে, ইংল্যান্ডের স্যানেটোরিয়াম থেকে ছাড়া পাওয়া রোগীর কিছু অংশ পাঁচ বছরের মধ্যে এবং বেশির ভাগ দু'বছরের মধ্যে মারা যায়। রামানুজনের ক্ষেত্রে ডাঃ চন্দ্রশেখরের সিদ্ধান্ত হল, এখন রোগ 'advanced stage-' এ উপনীত।

কুম্ভকোনমে রামানুজনের শারীরিক অবস্থার কোনো উন্নতি তো দেখা গেল না, বরং ধীরে ধীরে আরো খারাপের দিকে যেতে লাগল। এ প্রসঙ্গে রামানুজনের অসুস্থতা নিয়ে ক্যানিগেলের কিছু কথা উল্লেখের দাবি রাখে। তিনি বলছেন যে, ইংল্যান্ডে তাঁকে অনেক ডাক্তার দেখেছেন, নানা পরস্পর বিরোধী নিদান দিয়েছেন, বিভিন্ন হসপিটাল ও নার্সিংহোমে ভর্তি করা হয়েছে। ভারতবর্ষেও সেই একই অবস্থা। মাদ্রাজে দু'জায়গায় থেকেছেন। সংক্ষিপ্ত সময়ে থেকেছেন কোয়েম্বাটুরে। তারপর কুম্ভকোনম। সব কিন্তু মাত্র ন মাসে। 'More doctors. More examinations. More diagonoses. Through it all, his condition grew worse. Now, in Kumbakonam, the downward slide accelerated.'

রামানুজনের শারীরিক ও মানসিক অবস্থার সব কিছু জানিয়ে ডেউসবারি 1919

সালের খ্রিস্টমাসের আগে হার্ডিকে লিখলেন, 'He is still in very bad health and difficult to deal with, living up country with his family. Mr. Ramchandra Rao is doing what he can do for him, but Mr. Ramanujan himself will not consent to live in a suitable environment under proper treatment.'

ডাঃ চন্দ্রশেখর তাঁর ভালো চিকিৎসার জন্য তাঁকে মাদ্রাজে নিয়ে আসার কথা বললে তিনি প্রথমে যেতে রাজি হন নি। এ সম্বন্ধে একটি সূত্র থেকে জানা যায় যে, তিনি আর নিজের চিকিৎসা করাতে চান নি। অন্য এক সূত্র অনুসারে 'He had simply given up the will to live.'

অবশেষে রামানুজন রাজি হলেন মাদ্রাজে আসার জন্য। তবে মাদ্রাজ আসার সঠিক তারিখ জানা নেই। সম্ভবত তিনি 1920 সালের জানুয়ারির শুরুর দিকে মা, স্ত্রী ও শ্যালক শ্রীনিবাসকে সঙ্গে নিয়ে মাদ্রাজে আসেন। শহরের চেতপাট ডিভিশনে হৃদয়বান রায়বাহাদুর টি নাম্বেরুমাল চেট্টি নিজের বাংলোতে রামানুজনদের থাকার ব্যবস্থা করেন। প্রথমে তিনি 'কুড়সিয়া'-তে (Kudsia) থাকেন। ঠিকানা হল কুড়সিয়া, হ্যারিংটন রোড, চেতপাট, মাদ্রাজ। তিনি এখানে কিন্তু বেশিদিন বাস না করে চলে আসেন 'ক্রাইন্যান্ট' (Crynant) নামক বাড়িতে। শেষে চলে আসেন 'গোমেত্র' (Gometra) নামক বাড়িতে। তবে ক্রাইন্যান্ট থেকে গোমেত্রতে আসার একটা ছোটো ঘটনা আছে। রামানুজন তাঁর মা'কে বললেন যে, ক্রাইন্যান্টের 'ক্রাই' শব্দটি যেন তাঁর কাছে কেমন অশুভ বলে মনে হচ্ছে। তখন কোমলতাম্মল বাংলোর মালিকের কাছে আসল কথা না বলে বললেন যে রামানুজন একটু নিরিবিলি চান। তখন তাঁকে গোমেত্রতে নিয়ে আসা হয়।

চেতপাটে রায়বাহাদুর টি এন চেট্টির বদান্যতায় বাসস্থানের সংস্থান হল। যাতে সবচেয়ে ভালো চিকিৎসা সম্ভব হয় সে জন্য অনেকেই এগিয়ে এলেন। এদের মধ্যে তাঁর বন্ধু এস শ্রীনিবাস আয়েঙ্গায়ের নাম বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেটের সদস্যরাও অর্থ দিয়ে সাহায্য করতে এগিয়ে এলেন। চিকিৎসা চলে কিন্তু উন্নতির লক্ষণ নেই। এই অবস্থায়ও রামানুজন তাঁর অন্তর্লীন পরিহাস-প্রিয়তা থেকে দূরে সরে থাকেন নি। তিনি জানকীকে বলেন 'ওরা আমাকে চেতপাটে নিয়ে এসেছে। এখানে সব 'চেত-পা' হয়ে যাবে।' তামিলে 'চেত-পা' কথার অর্থ খুব তাড়াতাড়ি শেষ হয়ে যাওয়া।

চেতপাটে থাকার সময় 1920 সালের 12ই জানুয়ারি রামানুজন হার্ডিকে অনেক

দিন চিঠি লিখতে পারেন নি বলে দুঃখ প্রকাশ করে আর তাঁর 'মক-থিটা' অপেক্ষকের আবিষ্কারের কথা জানিয়ে চিঠি দিলেন। তিনি লিখলেন, 'Unlike the 'False' theta functions (studied particularly by Prof. Rogers in his interesting paper) they enter into mathematics as beautifully the ordinary theta functions'। সঙ্গে হার্ডির কাছে কিছু মক-থিটা অপেক্ষকের উদাহরণও পাঠালেন।

মক-থিটা অপেক্ষকের উপর কাজ রামানুজন সেই সময় করেছেন, যখন তিনি গুরুতর অসুস্থ। অসুস্থতা শুধু তাঁর দেহে, কিন্তু মন তাঁর সজীব ও সক্রিয়। শ্রান্তি, ক্লান্তি তাঁর দেহ ঘিরে, কিন্তু শ্রান্তিহীন, ক্লান্তিহীন সদা সৃষ্টিশীল মন তখন গণিতের নূতন জগতের আঙ্গিনায়। তাই তো যখন মক-থিটা অপেক্ষকের গাণিতিক মূল্য বিচার করা হয়, তখন সবাই বিস্ময়ে অভিভূত হন। এ সম্বন্ধে সুব্রমনিয়ান চন্দ্রশেখরের মন্তব্য 'One of the most original pieces of mathematics and in some ways the very best which Ramanujan did.'

এই মক-থিটা অপেক্ষকদের গুরুত্ব, গভীরতা ও সৌন্দর্য এত বিশাল যে এর আবিষ্কারের ষোল বছর পরও তা লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটিতে জি এন ওয়াটসনের (G.N. Watson) সভাপতির বিদায়ী ভাষণের বিষয় হয়ে ওঠে। তিনি 1936 সালের 14ই নভেম্বরের এই ভাষণে এর সূত্র সমূহের সৌন্দর্য সম্বন্ধে নিজের অনুভূতির কথা বলতে গিয়ে মাইকেল এঞ্জেলোর সৃষ্ট 'Day'. 'Night'. 'Evening' এবং 'Dawn' নির্দেশকারী চারটি অপরূপা মূর্তির স্নিগ্ধ সৌন্দর্যের কথা বলেন। তিনি তাঁর বক্তৃতা শেষ করলেন এই ভাবে,

'.... To his (Ramanujan's) students such discoveries will be a source of delight and wonder until the time shall come when we too shall make our journey to that Garden of Proserpine where

Pale, beyond porch and portal
Crowned with calm leaves, she stands
Who gathers all things mortal
With cold immortal hands.'

বিস্ময়কর হল, যখন রামানুজনের পরপারের আহ্বান নিকটতর হচ্ছিল, তখন যেন তাঁর প্রতিভার দ্যুতি আরো উজ্জ্বল, আরো তীব্র হচ্ছিল— দীপ নিভে যাবার আগের অবস্থার মতো বেশ উজ্জ্বল। এ সম্বন্ধে সেশু আয়ার ঠিকই বলেছেন, 'There are no papers and researches of his more valued nor more intuitive than those which he thought out during fateful days. His physical body was failing no doubt, but his intellectual vision grew proportionately keener and brighter.'

এখানে একটি ঘটনার কথা বলা বোধ হয় প্রাসঙ্গিক হবে। এর মাধ্যমে কোমলতা কেন রামানুজনের কাছ থেকে জানকীকে দূরে রাখতে চেয়েছিলেন, তার একটা ব্যাখ্যা পাওয়া যাবে। 1920 সালের মার্চের কোনো এক সময়ে কোমলতা নারায়ণ স্বামী আয়ার নামে একজন নামকরা জ্যোতিষীর কাছে রামানুজনের কোষ্ঠী বিচার করতে যান। জ্যোতিষী কোষ্ঠী দেখে বললেন যে, এ হচ্ছে এমন একজনের কোষ্ঠী যিনি বিশ্বখ্যাত হয়ে খ্যাতির শীর্ষে থাকার সময় মারা যাবেন অথবা যিনি সকলের কাছে অখ্যাত থেকেই অতি সাধারণের মতো হয়ে দীর্ঘদিন বাঁচবেন। তারপর যখন তাঁর কাছে জানকীর কোষ্ঠী আনা হল, তখন স্বামী ও স্ত্রী দু'জনের কোষ্ঠী পাশাপাশি রেখে জ্যোতিষী কিছুটা আশান্বিত হয়ে বললেন, যদি স্বামী-স্ত্রী দূরে দূরে থাকে তবে হয়তো কিছু বেশি দিন বাঁচতে পারে। কোমলতা নিজেও কোষ্ঠী বিচার করতে পারতেন। তিনি আগেই এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছিলেন। তিনি জ্যোতিষীর কথা শুনে বললেন, 'আমিও তাই চেয়েছিলাম ; কিন্তু ছেলে ভীষণভাবে আপত্তি করেছে। এমন বাধ্য ছেলে হয় না ; কিন্তু এ ব্যাপারে সে অনড়।'

রামানুজনের কাছ থেকে জানকীকে দূরে রাখার কোমলতার প্রয়াস তো সফল হয় নি, বরং শেষের মাসগুলিতে দু'জনের মানসিক নৈকট্য আরো বৃদ্ধি পায়। পরবর্তী কালে জানকীর স্মৃতিচারণ থেকে এ তথ্য জানা যায়। জানকীর কথায় শেষের দিনগুলিতে রামানুজন ছিলেন কেবলমাত্র 'skin and bones'। তিনি মাঝে মাঝে পেটে ও পায়ে তীব্র যন্ত্রণা অনুভব করতেন। যখন খুব বেশি ব্যথা হত তখন জানকী পিতলের পাত্রে জল গরম করতেন আর গরম জলে তোয়ালে ভিজিয়ে মালিশ করে দিতেন। এত দৈহিক যন্ত্রণার মধ্যেও রামানুজন গণিত সাধনায় নিমগ্ন। পরবর্তী কালে রামানুজন প্রসঙ্গে বলতে গিয়ে জানকী বলেছিলেন 'He wouldn't talk to any one who came to house. It was always maths ...... Four days before he died he was scribing.'

1920 সালের 26শে এপ্রিল ভোরে তিনি চেতনাশূন্য হয়ে পড়েন। দু ঘণ্টা ধরে জানকী তাঁর পাশে বসে পাতলা দুধের ফোঁটা তাঁর ঠোঁটের মধ্যে দিচ্ছিলেন। সকালের প্রায় শেষলগ্নে রামানুজনের জীবনের শেষ ঘণ্টা বেজে উঠল। শিয়রে বসে আছেন স্ত্রী, শয্যায় বসে আছেন বাবা-মা, দুই ভাই এবং কিছু বন্ধু। দিনের শেষে শেষকৃত্য সমাধা হল। রামচন্দ্র রাও তাঁর জামাতা তথা রামানুজনের বাল্যবন্ধু রাজা

গোপালাচারীর সাহায্যে চেতপাটের শ্মশানে শেষকৃত্যের ব্যবস্থা করেছিলেন। তাঁর শেষকৃত্যে কিন্তু অনেক আত্মীয়-স্বজন আসেন নি। 'কালাপানি' অতিক্রম করেও রামানুজনের রামেশ্বরমে প্রায়শ্চিত্ত করতে না যাওয়াকে তাঁরা মেনে নিতে পারেন নি।

রামানুজনের নশ্বর দেহের বিলুপ্তি ঘটল। তাঁর মৃত্যুকে সরকারিভাবে সরকারি করণিক নথিভুক্ত করলেন পরের দিন— রেজিস্ট্রেশন নম্বর - 228। কিন্তু তাঁর অবিনশ্বর কাজের মৃত্যু নেই। তাঁর মৃত্যুর শতবর্ষ পরেও গণিতে তাঁর মহত্তম কাজ শাখা-প্রশাখা মেলে পত্র-পুষ্পে বিকশিত হবে, শোভা বর্ধন করবে গণিতশাস্ত্রের,আর আকৃষ্ট করবে নানা মানুষকে ; তার সৌন্দর্য শুধু দীর্ঘকালের হবে না, হবে চিরকালের।

রামানুজনের বেদনা বিধুর অকাল প্রয়াণ আমাদের অনুভূতিকে স্তব্ধ করে দেয়, আমাদের মনে আক্ষেপের অনুরণন সৃষ্টি করে এবং সর্বোপরি চেতনাকে ক্ষত-বিক্ষত করে এক ব্যথার সুর বাজিয়ে তোলে। তাঁর মৃত্যুতে Times পত্রিকা ঠিকই লিখেছিল, 'There is something peculiarly sad in the spectacle of genius dying young, dying with the first sweets of recognition and success tasted, but before the full recognition of powers that lie within '

শেষের কথায়

জীবনকালে এবং মৃত্যুর পর প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষভাবে রামানুজনের নামের সঙ্গে যতজন বিশিষ্ট ব্যক্তির নাম জড়িয়ে আছে, সেই রকম কোনো উদাহরণ বিজ্ঞানের ইতিহাসের অন্য কোনো মনীষীর ক্ষেত্রে ঘটেছে কিনা সন্দেহ। তাঁর নামের সঙ্গে প্রত্যক্ষভাবে জড়িয়ে থাকা মহান ব্যক্তিত্বরা হচ্ছেন অধ্যাপক পি ভি সেশু আয়ার, রামচন্দ্র রাও, এস নায়ায়ণ আয়ার, স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং, ডঃ গিলবার্ট ওয়াকার, ডেউসবারি, হার্ডি, নেভিল, লিটলউড, মরডেল, আর্থার বেরি, গ্রিন হিল এবং আরো অনেকে। ওয়াটসন, উইলসন, এন্ড্রুজ, ডাইসন, হুইটেকার, আসকে, বার্ন্টি, র‍্যানকিন, রমানাথন, বেইলি, এটকিন, পলিয়া, পল ইডোজ প্রভৃতি বিশিষ্ট বিজ্ঞান-ব্যক্তিত্ব এদের মধ্যে কয়েকজন। তাছাড়া নোবেলজয়ী বিজ্ঞানী জে জে থমসন ও সুব্রমনিয়ান চন্দ্রশেখরের নামও রামানুজনের সঙ্গে জড়িত।

রামানুজন সম্বন্ধে একটা কথা অবশ্যই বলা যায় যে, তিনি ছিলেন বিজ্ঞান ইতিহাসের এক 'রোমান্টিক চরিত্র'। যাঁরাই তাঁর সংস্পর্শে এসেছেন অথবা তাঁর কাজের সামান্য পরিচয় উপলব্ধি করেছেন, তাঁদের প্রত্যেকেই রামানুজনের জন্য গভীর স্নেহ-প্রীতি-ভালোবাসার ডালি সাজিয়েছেন এবং অন্তর থেকে শ্রদ্ধা ও সম্ভ্রমের অর্ঘ্য নিবেদন করেছেন। তাঁর গাণিতিক কাজের রূপ-রস-গন্ধে ও অনন্য সৌন্দর্যে বোদ্ধারা আবিষ্ট অনুভূতি নিয়ে মুগ্ধ হয়েছেন। স্বল্প জীবনে তিনি যে ভাবে গণিতের ভাণ্ডারকে সমৃদ্ধ করেছেন তাঁর উদাহরণ ইতিহাসে খুবই বিরল।

রামানুজনের গণিতকীর্তির দলিলের কথা বলতে হলে প্রথমে তাঁর নোটবইয়ের কথা বলতে হয়। তাঁর সব কাজ তিনটি নোটবইতে, গবেষক হিসাবে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ে জমা দেওয়া তিনটি ত্রৈমাসিক প্রগতি প্রতিবেদনে (Quaterly progresive reports), হার্ডিকে লেখা চিঠিতে, সাঁইত্রিশটি গবেষণা-পত্রে (যার মধ্যে সাতটি হার্ডির সহযোগে যৌথভাবে), ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত প্রশ্ন ও সমাধান সমূহে, হারানো নোটবইতে (Lost Notebook) এবং হয়তো বা এখনও লোকের নজরে না আসা কিছু কাজের মধ্যে।

ইংল্যান্ডে যাবার আগে রামানুজন তাঁর কাজকে তিনটি নোটবইতে লিপিবদ্ধ করেছিলেন। তিনি যখন ইংল্যান্ডে যান, তখন সঙ্গে করে নোটবইগুলি নিয়ে যান। ভারতে ফিরে আসার সময় প্রথম নোটবইটি তিনি হার্ডির কাছে রেখে আসেন। 1921সালে হার্ডি রামানুজনের শেষ গবেষণাপত্র প্রকাশ করলেন। 1922 সালে

রামানুজনের কাজ নিয়ে মরডেলের গবেষণা পত্র ('Note on certain modular relations considered by Messrs Ramanujan, Darling, Rogers') প্রকাশিত হল। পরের বছর রামানুজনের কাজকে নির্ভর করে বি এম উইলসনের (B. M. Wilson) প্রবন্ধ 'Proof of some formulas of Ramanujan') প্রকাশিত হল। একই বছরে অর্থাৎ 1923 হার্ডি রামানুজনের নোটবইয়ের দ্বাদশ ও ত্রয়োদশ অধ্যায় নিয়ে আলোচনা করেন, যা পরা জ্যামিতিক শ্রেণীর (Para-geometric series) সূত্র ও উপপাদ্যে ভরা। তবে উল্লেখ করা দরকার যে, এই সব উপপাদ্যের অধিকাংশই ডাউগল (Dougall), সালসুৎজ (Saalschutz), ডিকসন (Dixon), কুমার (Kummar) প্রভৃতির আবিষ্কৃত উপপাদ্যের পুনরাবিষ্কার। এই লেখাগুলি প্রকাশিত হবার পর রামানুজনের নোটবই নিয়ে গণিতজ্ঞদের মধ্যে যথেষ্ট আগ্রহ ও উৎসাহ দেখা দিল। ইতিমধ্যে হার্ডি তাঁর কাছে থাকা নোটবই মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ে পাঠিয়ে দিয়েছেন। ফলে নূতন করে নোটবই জোগাড় করার চেষ্টা হল। হার্ডি ও ওয়াটসনের অনুরোধে মাদ্রাজ খ্রিষ্টান কলেজের অধ্যাপক টি এন সদগোপান মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের লাইব্রেরিতে সংরক্ষিত তিনটি নোটবইয়ের অবিকল কপি করে পাঠান। 1928 সালে হার্ডি জি এন ওয়াটসনকে রামানুজনের নোটবই হস্তান্তর করেন। সঙ্গে রামানুজনের অন্য কিছু লেখা, চিঠি ও কাগজপত্রও প্রত্যর্পণ করেন। তখন ওয়াটসন ও উইলসন দু'জনে রামানুজনের নোটবইয়ের সম্পাদনার কাজে লেগে যান। ঠিক হল প্রথম অধ্যায়গুলির সম্পাদনার দায়িত্ব নেবেন উইলসন এবং পরের অধ্যায়গুলির দায়িত্ব থাকবে ওয়াটসনের উপর। 1931 সালে অধ্যাপক ওয়াটসন জানান যে, তিনি ও উইলসন সাফল্যের সঙ্গে আঠারো মাস ধরে রামানুজনের নোটবইয়ের সম্পাদনার কাজ করে যাচ্ছেন। কিন্তু 1933 সালে 18ই মার্চ উইলসনের মৃত্যুর ফলে এ কাজে বাধা সৃষ্টি হয়। যদিও 1940 সাল পর্যন্ত ওয়াটসন একা এ কাজ করে যেতে থাকেন। তিনি প্রায় দু'ডজন প্রবন্ধও প্রকাশ করেন। তারপর সম্পাদনার কাজ থেমে যায়। অবশেষে 1977 সালে আমেরিকা ইলিনাস বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক ব্রুস সি বার্নট (Bruce C. Berndt) নিজের কাঁধে অসমাপ্ত কাজের দায়িত্ব তুলে নেন। উল্লেখ করা যেতে পারে 1957 সালে টাটা ইনস্টিটিউট অফ ফান্ডামেন্টাল রিসার্চ (TIFR) রামানুজনের তিনটি নোটবইয়ের অবিকল প্রতিরূপ (Facsimile Edition) দু'খণ্ডে প্রকাশ করে এবং 1987 সালে নরোসা পাবলিশিং হাউস এর পুর্নমুদ্রণ করে।

1977 সালে নেওয়া দায়িত্বভার বার্নট যোগ্যতার সঙ্গে পালন করেন। প্রায় দু দশক ধরে অক্লান্ত পরিশ্রম করে তিনি রামানুজনের নোটবইয়ের সম্পাদনা সম্পূর্ণ

করেন। স্প্রিঙ্গার ভারল্যাগ (Sringer Verlag) তাঁর সম্পাদিত 'Ramanujan Notebooks' Part I, Part II, Part III, Part IV, Part V যথাক্রমে 1985, 1989, 1991, 1994 এবং 1997 সালে প্রকাশ করে। উল্লেখ করা যেতে পারে, সম্পাদনার ব্যাপারে বার্নটের মূল লক্ষ্য ছিল রামানুজনের প্রতিটি উপপাদ্য প্রমাণ করা আর জানা ফলের জন্য যেখানে প্রমাণ পাওয়া যাবে তার উৎস উল্লেখ করা। তাঁর সম্পাদিত পাঁচটি খণ্ডে মোট 39টি অধ্যায় এবং 3254টি গাণিতিক ফল আছে। (প্রথম খণ্ডে 1 থেকে 9 পর্যন্ত অধ্যায় ও 759 টি ফল, দ্বিতীয় খণ্ডে 10 থেকে 15 পর্যন্ত অধ্যায় ও 605টি ফল, তৃতীয় খণ্ডে 16 থেকে 21 পর্যন্ত অধ্যায় ও 834টি ফল, চতুর্থ খণ্ডে 22 থেকে 31 পর্যন্ত অধ্যায় ও 491টি ফল, এবং পঞ্চম খণ্ডে 32 থেকে 39 পর্যন্ত অধ্যায় ও 565 টি ফল আছে।

রামানুজনের হারানো নোটবই নিয়ে এক মজার কাহিনী আছে। 1965 সালে ওয়াটসনের মৃত্যুর পর তাঁর স্ত্রী ওয়াটসনের সহযোগীর ছেলে জে এম হুইট্যাকারকে (J. M. Whittaker) লাঞ্চে আমন্ত্রণ করেন। হুইট্যাকার নিজে একজন গণিতজ্ঞ। ওয়াটসনের স্বভাব ছিল দরকারি ও অদরকারি সব কাগজ জমিয়ে রাখা। মিসেস ওয়াটসন চাইলেন অদরকারি কাগজগুলো পুড়িয়ে ফেলবেন। তাই তিনি হুইট্যাকারকে অনুরোধ করলেন--- কাগজপত্র পরীক্ষা করে দরকারি ও অদরকারি কাগজগুলো আলাদা করে চিহ্নিত করতে। তা করতে গিয়ে হুইট্যাকার ওয়াটসনের রেখে যাওয়া কাগজের মধ্যে রামানুজনের কিছু কাজ খুঁজে পেলেন। তিনি বলছেন, 'By an extraordinary stroke of luck one of my dips brought up the Ramanujan meterial.' তিনি এই কাগজগুলি রবার্ট র‍্যানকিনের (Robert Rankin) কাছে হস্তান্তর করেন। র‍্যানকিন আবার এগুলি ট্রিনিটি কলেজের লাইব্রেরিতে দিয়ে আসেন, যা ফাইল বন্দী হয়ে পড়ে থাকে। পরবর্তী সময়ে 1976 সালে এই ফাইলবন্দী কাগজগুলি পেনসিলভেনিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক জর্জ এন্ড্রুজের (George Andrews) নজরে আসে। কাগজগুলিতে ছিল রামানুজনের শেষ জীবনের মক-থিটা অপেক্ষক সংক্রান্ত কাজ এবং আরো কিছু কাজ যা হয়ত ইংল্যান্ডে অবস্থান কালে বা পরবর্তী সময়ে করে হার্ডির কাছে রেখেছিলেন, কিন্তু প্রকাশিত হয় নি। এন্ড্রুজ এগুলো হাতে পেয়ে দারুণ উত্তেজিত। 'I (Andrews) had my hands on something spectacular.' কারণ, এন্ড্রুজের নিজের পিএইচ ডি থিসিসের বিষয়বস্তু এই কাগজের কাজগুলির অন্তর্গত ! এই আবিষ্কারের চমৎকারিত্বে গণিতজ্ঞ এমা লেমার (Emma Lehmar) এতই আপ্লুত যে তিনি এই আবিষ্কারের সঙ্গে তুলনা করেন 'the discovery of complete sketch of tenth symphony of Beethoven'-এর সঙ্গে। কাগজগুলি হারিয়ে গিয়েছিল বলে একে নাম দেওয়া হয় 'হারানো নোটবই', যদিও ট্রিনিটি কলেজের রেন (Wren) লাইব্রেরি হারিয়ে যাওয়াকে মেনে নিতে রাজি নয়। উল্লেখ করা যেতে পারে, 1988 সালে 'The Lost Notebook and Other Unpublished Papers' নাম দিয়ে নরোসা পাবলিশিং হাউস এটা প্রকাশ করে।

রামানুজনের কাজ নিয়ে প্রকাশিত বইয়ের কথা বলতেগেলে প্রথমে বলতে হয় 1927 সালে কেমব্রিজ ইউনিভারসিটি প্রেসের সৌজন্যে জি এইচ হার্ডি, পি ভি সেশু আয়ার ও বি এম উইলসনের সম্পাদনায় প্রকাশিত 'Collected Papers by Srinivasa Ramanujan' নামক বইয়ের কথা। এতে রামানুজনের নিজের ও হার্ডির সঙ্গে যৌথভাবে করা মোট সাঁইত্রিশটি গবেষণাপত্র, ইন্ডিয়ান ম্যাথম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত রামানুজন প্রেরিত প্রশ্ন ও সমাধান (যার মোট সংখ্যা 59) এবং দুটি জীবনী (একটি পি ভি সেশু আয়ার ও রামচন্দ্র রাও-এর এবং অন্যটি জি এইচ হার্ডির) সংযোজিত হয়েছে। পরিশিষ্টে গবেষণাপত্র প্রকাশের উপর 'Notes' এবং হার্ডিকে লেখা রামানুজনের চিঠিগুলির প্রতিলিপি সন্নিবেশিত হয়েছে।

রামানুজনের জীবন ও তাঁর কাজ যে গণিতজ্ঞদের কীভাবে সম্মোহিত করেছে, তা ভাবলে বিস্ময়ে অবাক হতে হয়। এ প্রসঙ্গে দু একটি ঘটনা উপরের মন্তব্যের যাথার্থ্য প্রতিপন্ন করবে। 1987 সালে যখন ইলিনাস বিশ্ববিদ্যালয়ে রামানুজনের জন্ম শতবর্ষ পালিত হচ্ছে (1.6.87 থেকে 5.6.87 পর্যন্ত), তখন সেখানে ফ্রিম্যান জে ডাইসন (Freeman J. Dyson) আমন্ত্রিত। তাঁর বক্তৃতায় তিনি ছাত্রজীবনে পুরস্কার হিসাবে পাওয়া তাঁর পছন্দ করা বই 'Collected Papers by Srinivasa Ramanujan'-এর কথা উল্লেখ করে বললেন যে, পুরস্কার পাওয়ার মুহূর্তটি আগের মতো সমান উজ্জ্বল। তিনি আরো বললেন, 'Whenever I am angry or depressed I pull down the collected papers from the shelf and take quiet stroll in Ramanujan's garden.' এই বলে তিনি যাঁরা 'মাথাব্যথা' বা 'স্নায়বিক চাপে' ভুগছেন তাঁদের আরোগ্যের জন্য একই চিকিৎসার পথ নির্দেশ করেন। তিনি বললেন যে, লেখাগুলি শুধু মাথাব্যথা সারানোর ভালো ঔষধ নয়, 'they are full of beautiful ideas which may help you to do more interesting mathematics.'

সত্যিই তাই। এক প্রজন্ম পার করেও রামানুজনের গণিত নূতন দিক নির্দেশ করা বন্ধ করে নি। বিশুদ্ধ গণিত সাধকের বিশুদ্ধ গণিত আজ শুধু ফলিত গণিত ও

বিজ্ঞানের অন্য শাখায় প্রয়োগক্ষেত্র বিস্তার করে নি, এ সব ক্ষেত্রে এক অপরিহার্য সম্পদ হিসাবে বিবেচিত হচ্ছে। মহাবিশ্বের সুপারস্ট্রিং তত্ত্বের বিকাশে, ব্লাস্ট ফার্নেসের নির্মাণ প্রযুক্তিতে, পলিমার রসায়নে, মহাকাশ বিদ্যায়, জটিল আণবিক প্রণালীতে, স্ট্যাটিস্ক্যাল মেকানিক্সে, টেলিকমিউনিকেশন ও সুপার কম্পিউটারে, এমন কি ক্যানসার নিরাময়ের গবেষণায় রামানুজনের গণিত ব্যবহৃত হচ্ছে। অনেকে রামানুজনের গণিতের সঙ্গে আধুনিক গণিতের বৃহৎ জগতের মধ্যে সেতুবন্ধন চাইছেন। যেমন, বিভাজনের বিভাজ্যতা ধর্মাবলীর (congruence properties of partitions) সাহায্য নিয়ে অলিভার এটকিন (Oliver Atkin) চেয়েছেন 'grand unification of the arithmetic theroy of modular forms', যেখানে জানা ও অজানা বিভাজ্যতার সব ধর্মাবলী একটিমাত্র বিশেষ রূপ নিয়ে আবির্ভূত হবে আর function theroy, operator theroy একসঙ্গে মিলেমিশে এক নূতন রাজ্যের সন্ধান দেবে। সত্যি রামানুজনের গণিত বাগান আজ যেন উন্মুক্ত— 'a garden with wide vistas open on all sides.'

শুধু তাই নয়। রামানুজনের টাও-অপেক্ষক (tau–function) আজ 'Affine Lie Algebra'-তে প্রযুক্ত হচ্ছে। ডাইসন ঠিকই বলেছেন, 'The seeds of Ramanujan's garden have been blowing on the wind and have been sprouting all over the land scape.'

রামানুজনের কাজের ব্যাপ্তি প্রসঙ্গে রিচার্ড আস্কে (Richard Askey) বলেছেন যে, পদার্থবিদ্যায় বহু চলরাশির অপেক্ষক নিয়ে অবিশ্বাস্য সূত্রের বিশ্লেষণে রামানুজনের কাজ থেকে সাহায্য নেওয়া হচ্ছে। তিনি এ প্রসঙ্গে মন্তব্য করেছেন, 'The great age of formulae may be over, but age of great foumulae is not.'

শুরু থেকে রামানুজন যদি বিকশিত হবার অনুকূল পরিবেশ পেতেন অথবা তিনি যদি এত স্বল্পজীবী না হতেন, তা হলে গণিতবিশ্ব তথা বিজ্ঞানজগৎ কী অপরূপ মণিমুক্তায় ভরে উঠত, তা বোধ হয় আজ এই মুহূর্তে বিচার করা সম্ভব নয়। রামানুজনের জীবনে কিছু কিছু ঘটনা নিয়ে কিছু বির্তক আছে। 'Short stories in science' গ্রন্থের লেখক জে জি ক্রাউথার (J.G. Crowther) বলেছেন, 'The story of obscurity, the rise and tragic end of Ramanujan is one of the most romantic in the history of science, and it will always be debated whether he had better not have gone to Combridge.'

রামানুজন যদি কেমব্রিজ না যেতেন তাহলে রামানুজনের যে ছবি আমরা আজ পাই, যে খ্যাতি, প্রশংসা ও কাজের গভীরতার কথা আজ সবাই জানি, তা কি এমনভাবে পাওয়া যেত ? প্রতিভার উন্মেষের পরিবেশহীনতায় পুনরাবিষ্কারের ভারে রামানুজনের সৃজনশীলতা কি গতিরুদ্ধ হত না ? কেমব্রিজের গণিতমননশীলতার আবহাওয়া না পেয়ে, হার্ডির সহৃদয় সাহচর্য ও সযত্ন লালন থেকে বঞ্চিত থেকে আজ রামানুজনের গণিতবাগানে কী ধরনের গাছ থাকত, তার সঠিক ধারণা দেওয়া আজ সম্ভব নয়। তবে অবশ্যভাবে বলা যায় যে, কেমব্রিজে না গেলে রামানুজনের যথার্থ প্রস্ফুটন ব্যাহত হত। হার্ডির স্নেহ ও সাহায্য না পেলে রামানুজনের গণিতবাগানে আজ যে ফুল প্রস্ফুটিত হচ্ছে, গাছের বীজ থেকে যে অঙ্কুর জন্মলাভ করছে— তা সম্ভব হত না।

মনে রাখা দরকার, অগ্রজের স্নেহ, ভালবাসা, যত্ন ও মমতা দিয়ে হার্ডি সবসময় রামানুজনকে আগলে রেখেছিলেন। রামানুজনের উন্নতি, ক্ষমতার পূর্ণ বিকাশ, প্রতিভার যথাযথ স্ফুরণ এবং খ্যাতির বৃদ্ধির জন্য হার্ডি সতত আন্তরিক প্রয়াস করে গেছেন— রামানুজনের জীবনকালে। আর রামানুজনের মৃত্যুর পর চেষ্টা করে গেছেন তাঁর গণিতকীর্তিকে অক্ষয় করতে। রামানুজনের জীবনীকার ক্যানিগেল যথার্থই বলেছেন, 'Hardy did all he could do to champion Ramanujan and advance his mathematical legacy.'

সত্যি গণিত ইতিহাসে হার্ডি ও রামানুজন যেন একটি গাছের একটি বৃন্তে দুটি ফুল। প্রত্যেকে প্রত্যেকের পরিপূরক হিসাবে কাজ করে গেছেন। রামানুজনের জীবনকাহিনী একজন ব্যক্তির জীবনকাহিনী নয়, তা যেন 'a story of two men.' রামানুজনকে নিয়েই হার্ডির বিশেষ আগ্রহ, তাঁর প্রতি যেন হার্ডির অফুরানে স্নেহ ও অপর্যাপ্ত শুভকামনা। রামানুজনও হার্ডিকে সঠিক ভাবে চিনেছেন। পরমবন্ধু, একান্ত হিতৈষী ও চিরন্তন শুভার্থী রূপে হার্ডিকে রামানুজন শ্রদ্ধা করেছেন এবং অকপটে নির্ভর করেছেন।

চরিত্রের মধ্যে এক অদ্ভুত মিল ও অমিল নিয়ে দু'জনে পরস্পরের দিকে আকর্ষিত হয়েছেন। দুজনেই বিশুদ্ধ গণিতের সাধক। হার্ডি যুদ্ধকে ঘৃণা করেন। যুদ্ধের প্রতি তাঁর এমন ঘৃণা যে তিনি ফলিত গণিতকে (যেমন ballistics বা aerodynamics) 'repulsively ugly and intolerably dull' হিসাবে গণ্য করতে দ্বিধা বোধ করেন নি। রামানুজনও সমানভাবে যুদ্ধকে ঘৃণা করতেন। এমন কি, তিনি একবার লিটলউডের দেওয়া যুদ্ধ সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে অস্বীকারও করেন। দুজনের হৃদয় ছিল বড়ো মাপের। আর অমিলের ব্যাপার বলতে

গেলে বলতে হয়, হার্ডি ছিলেন নাস্তিক কিন্তু রামানুজন তা নয়। তবে রামানুজনের আস্তিকতার শিকড় কত গভীর, সে সম্বন্ধে মতান্তর আছে।

হার্ডির পরিবারে গণিতের প্রতি ভালোবাসার এক পরিবেশ ছিল। হার্ডির বাবা-মা দু'জনেই শিক্ষক ছিলেন। দু'জনেরই গণিতের প্রতি বেশ আগ্রহ ছিল। সেই আগ্রহ হার্ডির মধ্যে সঞ্চারিত হয়। হার্ডি পরে বিশুদ্ধ গণিতের এক অসাধারণ ব্যক্তিত্ব হিসাবে পরিচিত হন। তাঁর সম্বন্ধে বলা হয়, 'He was the purest of the pure.' ছাত্রজীবনে অধ্যাপক লাভের উপদেশে জর্ডনের লেখা বই পড়ে উদ্বুদ্ধ হন আর বিশুদ্ধ গণিতের রত্নসম্ভার আহরণ করতে থাকেন।

উইনচেষ্টারে প্রাথমিক শিক্ষার পর হার্ডি কেমব্রিজে আসেন। বাইশ বছর বয়সে ম্যাথেম্যাটিক্যাল ট্রাইপোজে সর্বোচ্চ স্থান অধিকার করার পর ট্রিনিটি কলেজের ফেলোশিপ পান। তার আগে 1898 সালে তিনি চতুর্থ র‍্যাঙ্গলার হয়েছিলেন। তিনি 1919 সাল পর্যন্ত ট্রিনিটি কলেজে ছিলেন। 1906 সালে তিনি কেলি অধ্যাপক পদে যোগ দেন। 1910 সালে তিনি রয়েল সোসাইটির ফেলো হিসাবে নির্বাচিত হন। 1919 সালে 'সাভিলিয়ান অধ্যাপক' (Savilian Professor of Geometry) পদে যোগ দিয়ে তিনি অক্সফোর্ড চলে আসেন। 1928 সালে প্রিন্সটন বিশ্ববিদ্যালয়ে এবং পরে ক্যালিফোর্নিয়া ইনস্টিটিউট অফ টেকনোলজিতে তিনি আমন্ত্রিত অধ্যাপক হিসাবে কাজ করেন। 1931 সালে তিনি আবার কেমব্রিজে ফিরে আসেন 'স্যাডলেরিয়ান অধ্যাপক' (Sadleirian Professor of Pure Mathematics) হিসাবে। 1947 সালের 1লা ডিসেম্বর যেদিন তাঁকে রয়েল সোসাইটির সর্বোচ্চ সম্মান 'কোপলে মেডেল' (Copley medal) আনুষ্ঠানিক ভাবে প্রদান করার কথা, সেই দিনই তিনি দেহত্যাগ করেন।

সারাজীবন অবিবাহিত সৌম্যদর্শন সুদেহী আভিজাত্যপূর্ণ বিশুদ্ধ গণিতজ্ঞ হার্ডি গণিতভাণ্ডারের সমৃদ্ধি বৃদ্ধিতে নানাভাবে সাহায্য করেছেন। মমত্ব দিয়ে রামানুজনের প্রতিভাকে বিকশিত করার বিশিষ্ট ভূমিকা গ্রহণ করা ছাড়াও তিনি নিজে প্রায় চারশো গবেষণাপত্র প্রকাশ করেছেন, লিটলউড এবং রামানুজনের সঙ্গে যৌথভাবে কাজ করে বহু মহান ও সৃজনশীল কাজের অংশীদার হয়েছেন। তাছাড়া তিনি মূল্যবান এগারোটি পুস্তক রচনা করেছেন। হার্ভার্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের ত্রিশত-বর্ষপূর্তি উপলক্ষে 1936 সালে বিশিষ্ট ব্যক্তিদের সম্মান জানানো হয়, তাঁদের মধ্যে হার্ডিও ছিলেন। তাঁর সম্বন্ধে অভিজ্ঞানপত্রে লেখা ছিল, 'A British mathematician who has led the advance to heights inaccessible by previous generation.'

গণিত ছাড়া ক্রিকেট ও টেনিসের প্রতি তাঁর আগ্রহ ও ভালোবাসা চিরকাল অটুট ছিল। দৃঢ়চেতা হার্ডি সবসময় নিজের সংকল্পে অনড় থাকতেন। কিন্তু তিনি বিশাল হৃদয় ও উদার মনের মানুষ ছিলেন। সি পি স্নো হার্ডির সম্বন্ধে বলেছেন, 'A character so remarkably free from the petty meanness of human life..... the most generous of men.' হার্ডির চরিত্রের বিভিন্ন দিক একটি ছোট চিঠির মধ্যে পাওয়া যেতে পারে। 1920 সালে কোন এক বন্ধুকে লেখা চিঠিতে হার্ডি নববর্ষের ইচ্ছার কথা জানিয়ে যে তালিকা দিয়েছিলেন, তা তাঁকে চেনাতে আমাদের সাহায্য করে। তাঁর ইচ্ছাগুলি ছিল

(i) 'রিম্যান হাইপোথিসিস' (Riemann hypothesis) প্রমাণ করা,

(ii) ওভালের শেষ টেস্ট ম্যাচের চতুর্থ ইনিংসে 211 রান করে নট আউট থাকা,

(iii) এমন একটি যুক্তি খুঁজে পাওয়া যা ভগবানের অনস্তিত্ব সম্বন্ধে জনসাধারণের মনে দৃঢ় প্রত্যয় সৃষ্টি করবে,

(iv) এভারেস্টের চূড়ায় প্রথম ব্যক্তি হওয়া,

(v) ইউ এস এস আর, গ্রেট ব্রিটেন এবং জার্মানির প্রথম প্রেসিডেন্ট হিসাবে বিঘোষিত হওয়া,

(vi) মুসোলিনিকে হত্যা করা।

রামানুজনের সঙ্গে হার্ডির যোগাযোগ দু'জনের জীবনের গতিকে যেন নিয়ন্ত্রিত করেছে। দুই প্রতিভাধর গণিতজ্ঞ যেন একে অপরের জন্য তৈরি হয়েছিলন। রামানুজনের জীবনীকার সুরেশ রাম যথার্থই বলেছেন, 'The two genii complemented each other and contributed to their mutual growth. The best testimony to it is provided by their joint paper on partitions'. তিনি আরো বলেছেন যে হার্ডির মধ্যে রামানুজন খুঁজে পেয়েছিলেন 'his brother, freind and colleague.' আর 'In Ramanujan, Hardy found inspiration.' সত্যি রামানুজনের সঙ্গে যদি হার্ডির সহযোগ স্থাপিত না হত, তাহলে 1914 থেকে 1918 পর্যন্ত প্রথম বিশ্বযুদ্ধকালীন সময় হার্ডির কাছে হয়ে উঠত 'darker'. এ মন্তব্য করেছেন সি পি স্নো। তিনি আবারো বলেছেন, 'It was the work of Ramanujan which was Hardy's solace during the bitter college quarrels'। শুধু কি তাই ? সারাজীবন 'a bright beacon, luminous in him', এ কথা বলেছেন রামানুজনের জীবনীকার ক্যানিগেল।

রামানুজনের অকাল প্রয়াণের জন্য হার্ডি প্রস্তুত ছিলেন না। তাঁর পক্ষে এটা মেনে নেওয়া খুব কষ্টকর ও বেদনাদায়ক ছিল। কেমব্রিজ ছেড়ে তিনি যখন 1919 সালে অক্সফোর্ড চলে আসেন, তার কয়েকমাস পরে রেজিস্ট্রার ডেউসবারির চিঠিতে রামানুজনের তিরোধানের খবর পেয়ে তাঁকে লেখেন, '. . . এবং তাঁর (রামানুজনের) যে শেষ চিঠি (প্রায় দু মাস আগে) পেয়েছিলাম তাতে তাঁকে বেশ উৎফুল্ল মনে হয়েছিল এবং চিঠিটি গণিতে ভরা ছিল।' হার্ডির কাছে রামানুজনের মৃত্যু যে প্রচণ্ড শোকের হবে তা বলার অপেক্ষা রাখে না। তিনি ডেউসবারিকে আরো লিখছেন যে, রামানুজনের কাছে তিনি কি পরিমাণ ঋণী তা বলে বোঝানো যাবে না। রামানুজনকে জানার পর থেকে তাঁর সৃজনশীলতা হার্ডির কাছে পরামর্শের চিরন্তন উৎস ছিল এবং রামানুজনের মৃত্যু 'One of the worst blows I (Hardy) have ever had'। রামানুজনের প্রতি হার্ডির অনুভূতিকে অনুভবের উত্তাপে আত্মস্থ না করলে বোঝা যাবে না। তাই তো হার্ডির লেখা 'Ramanujan : Twelve lectures on subjects suggested by life and works' সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে মরডেল ঠিকই বলেছেন 'a labour of love.' রামানুজন সম্বন্ধে হার্ডির মনোভাব মেরি কার্টরাইট (Mary Cartwright) যথার্থ করেছেন ঃ 'Hardy was terribly proud, and rightly, of having discovered Ramanujan'। রামানুজনের প্রতি হার্ডির আন্তরিকতা প্রত্যেকের কলমেই প্রকাশ পেয়েছে। ক্যানিগেল বিশ্লেষণ করে বলেছেন, 'All his life he (Hardy) championed him (Ramanujan), hailed him. Recognizing Ramanujan's genius he wanted only to push it towards its limits'। বাস্তবিকই, 'Hardy was in many ways the best and the truest friend Ramanujan ever had'।

তবে স্নেহ- ভালবাসার আতিশয্যে হার্ডি কিন্তু রামানুজনের মূল্যায়নে নিজের বিশ্লেষণী গণি তজ্ঞের বিশিষ্টতা হারিয়ে ফেলেন নি। তাঁর বিভিন্ন লেখা ও বক্তৃতা এ ব্যাপারে আমাদের সহায়তা করবে। লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির প্রসিডিংস-এ [(2), 19 (1921)] 'Obituary Notice'-এ হার্ডি তাঁর কাছে রামানুজনের চিঠিতে প্রেরিত উপপাদ্যসমূহের সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে অকপটে বলেছেন যে, জটিল চলরাশির অপেক্ষক সম্বন্ধে রামানুজনের অজ্ঞতা রামানুজনের কাজকে ত্রুটিপূর্ণ করেছে। মৌলিক সংখ্যা সম্বন্ধে কাজগুলির সব সঠিক নয়। তবে রামানুজনের ব্যর্থতার কথা বলে কিন্তু তিনি থেমে যান নি। তিনি বলেছেন, 'And yet I am not sure that, in some ways, his failure was not more wonderful than any of his triumphs.'

রামানুজনের প্রতিভার চমৎকারিত্বের প্রশংসা করতেও হার্ডি ভোলেন নি। লান্‌ডাউ (Landau) কর্তৃক আবিষ্কৃত একটি ফলের পুনরাবিষ্কার করেন রামানুজন। এ সম্বন্ধে বলতে গিয়ে হার্ডি বলছেন যে, রামানুজনের কাছে লান্‌ডাউ-এর মতো হাতিয়ার ছিল না ; তিনি ফরাসি বা জার্মান জানেন না। তবুও এটা যথেষ্ট বিস্ময়কর যে, যে সব সমস্যা ইউরোপের মহান গণিতজ্ঞরা গত একশো বছর ধরে সমাধান করতে পারেন নি বা যার সমাধান তখনও পর্যন্ত পাওয়া যায় নি, সেই সব সমস্যা রামানুজনের চিন্তায় এসেছিল।

হার্ডি কিন্তু রামানুজনের প্রতিভার মধ্যে কোনো বিশেষ রহস্য বা চিন্তার ধরনে কোনো অতীন্দ্রিয়তা বা পদ্ধতির মধ্যে কোনো অস্বাভাবিকতার কথাকে আমল দেন নি বা বিশ্বাস করতেন না। তাঁর মতে সব গণিতজ্ঞই একই ভাবে সমস্যার গোড়া ধরেই চিন্তা করে এবং রামানুজন এর ব্যতিক্রম নন। তিনি মন্তব্য করেছেন, "His memory, his power of calculation were very unusal, but they could not reasonably called 'abnormal'."। তবে গণিতের যে সব ক্ষেত্রে রামানুজন সাবলীল বিচরণ করেছেন সে সব ক্ষেত্রে তাঁর সমতুল গণিত ইতিহাসে বিরল, সে কথা হার্ডি অকপটে বলেছেন। বীজগাণিতিক সূত্রাবলী, অসীম শ্রেণীর রূপান্তর প্রভৃতির ক্ষেত্রে রামানুজনের অন্তর্দৃষ্টিকে অতি বিস্ময়কর হিসাবে বর্ণনা করেছেন তিনি। এ সব ক্ষেত্রে কেবলমাত্র অবিস্মরণীয় গণিতজ্ঞ অয়লার ও জ্যাকোবির সঙ্গে রামানুজন তুলনা করেছেন হার্ডি। তাঁর স্মৃতিশক্তি, ধৈর্য, গণনার ক্ষমতা এবং নিজ সিদ্ধান্তের দ্রুত রূপান্তর করার ক্ষমতাকে হার্ডি 'really startling' বলে অভিহিত করে বলেছেন যে, নিজের ক্ষেত্রে রামানুজনের কোনো প্রতিদ্বন্দ্বীই নেই।

রামানুজনের গাণিতিক অবদানের কথা বলতে গিয়ে লিটলউডও উচ্ছ্বসিত। তিনি বলেছে যে, সনাতন সংখ্যাতত্ত্বের ক্ষেত্র বাদ দিলে সূত্রের এমন কোনো ক্ষেত্র নেই যাকে রামানুজন সমৃদ্ধ করেন নি বা যেখানে তিনি নূতন স্বভাবনার দিক খুলে দেন নি। তিনি মুগ্ধতায় আবিষ্ট হয়ে বলেছেন রামানুজনের গাণিতিক কাজ পাঠকদের সামনে সবসময় 'perpetual shocks of delighted surprise' নিয়ে উপস্থিত হবে।

রামানুজনের কাজের মধ্যে গভীর অন্তর্দৃষ্টি, অনন্য মৌলিকতা এবং অপ্রতিরোধ্য সৃজনশীলতার সম্বন্ধে কারুর কোনো দ্বিমত থাকতে পারে না। তবে তাঁর জীবনের একটি ব্যাপারে একটি বিতর্ক আজও চলে আসছে। রামানুজন প্রথম জীবনে প্রথাগত শিক্ষায় শিক্ষিত হবার সম্পূর্ণ সুযোগ থেকে বঞ্চিত হয়ে নিজের সময়ের গণিতের

অগ্রগতি সম্বন্ধে অপরিচিত থেকে এবং সনাতন গাণিতিক রীতিনীতি সম্পর্কে অজ্ঞতা নিয়ে নিজস্ব ধারায় স্বশিক্ষিত হয়ে যে গাণিতিক অবদান রেখে গেছেন তার মূল্য বেশি, না তিনি যদি গোড়া থেকে ইউরোপীয় শিক্ষায় শিক্ষিত গণিতজ্ঞরূপে অবদান রাখতেন তার দান বেশি হত— এ নিয়ে অনেকেই ভিন্ন মত পোষণ করেন বা করবেন।

ব্রুস বার্নট বলেছেন যে, একজন ডিগ্রিধারীর মতো সনাতন পদ্ধতিতে যথাযথ শিক্ষিত হওয়া গণিতজ্ঞের মন ও অভিজ্ঞতা নিয়ে গবেষণা করলে রামানুজন তাঁর নোটবইতে এত বেশি সূত্র-উপপাদ্য লিখে যেতে পারতেন না। 'তিনি ভেবেছিলেন এদের প্রমাণ তিনি করেছেন, কিন্তু আদৌ কোন প্রমাণ দিয়ে যান নি। ইতিহাসের পথ অন্যভাবে হলে গণিত কিন্তু দরিদ্র হত।'

1921 সালে 'Obituary Notice' এ হার্ডি মন্তব্য করছেন যে, রামানুজন আরো বড়ো গণিতজ্ঞ হতেন যদি আর একটু অল্প বয়েসে তাঁকে পাওয়া যেত এবং পোষ মানানো যেত। কিন্তু তখনকার এই মতের অনুকূলে তাঁর দৃঢ় প্রত্যয় ছিল না। পর মুহূর্তে অন্য সম্ভাবনার কথা তিনি বলছেন। 'On the other hand he would have been less Ramanujan. and more of a European professor, and the loss have been greater than the gain', বলেও মন্তব্য করেন তিনি। এই মন্তব্য কিন্তু তিনি স্থির নিশ্চিন্ত হয়ে করছেন না, একটা সম্ভাবনার কথা ব্যক্ত করেছেন মাত্র। আর তখন তাঁর মানসিক অবস্থা হল অতি প্রিয়জনকে হারাবার শোকে মুহ্যমান। রামানুজনের স্মৃতির সাড়া তখন হার্ডির সারা সত্তা জুড়ে— হৃদয়, মন ও চেতনা শোকানুভূতিতে বিহ্বল। তাই পরবর্তী সময়ে 1936 সালে হার্ডি যখন হার্ভার্ড-বক্তৃতায় রামানুজনের মূল্যায়ন করেন তা অনেক বেশী গ্রহণীয়। হার্ডি নিজের আগের মন্তব্যকে নিজেই 'ridiculous sentimentalism' হিসাবে আখ্যায়িত করেছেন। তিনি রামানুজনের ইংল্যান্ডে আসার আগের পাঁচ বছরের জন্য হতাশা প্রকাশ করেছেন। বলেছেন, 'The years between 18 and 25 are critical years in a mathematician's career. and the damage had been done. Ramanujan's genius never had again the chance of full development'। তিনি এর জন্য তখনকার ভারতীয় সামাজিক পদ্ধতিকেও কটাক্ষ করেছেন।

শুধু তাই নয়। হার্ডি অন্য জায়গায় বলেছেন, '... during his five unfortunate years his (Ramanujan's) genius was misdirected. side-tracked and to a certain extent disorted'। তিনি রামানুজনের অকাল

প্রয়াণে ভীষণভাবে শোকাভিভূত হলেও তাকে রামানুজনের জীবনে আসল 'ট্রাজেডি' হিসাবে চিহ্নিত করেন নি। আসল ট্রাজেডি হল প্রতিভার বিকাশের জন্য যথাযথ পরিকাঠামো ও পরিবেশ না পাওয়া। তিনি বলেছেন যে, যে কোনো মহান ব্যক্তির অল্পবয়সে মারা যাওয়াটা অবশ্যই 'বিপর্যয়', কিন্তু গণিতজ্ঞ হিসাবে একজন ত্রিশ বছর বয়সেই 'মোটামুটি বৃদ্ধ'।

তবে ক্যানিগেল মনে করেন, 'Sheer intuitive brilliance coupled to long, hard hours on his slate made up for most of his educational lapse. This 'poor and solitary Hindu pitting his brains against the accumulated wisdom of Europe' as Hardy called him, had rediscovered a century of mathematics and made new discoveries that would captivate mathematicians for next century.'

শুধু গণিতজ্ঞ হিসাবে নয়, মানুষ হিসাবেও রামানুজন অনন্যসাধারণ ছিলেন। তাঁর ভিতরের এবং বাইরের রূপের মধ্যে এক অসামান্য সমন্বয় সব সময় বিরাজ করত। এক অসাধারণ ক্ষমতার সাহায্যে তিনি অন্তর ও বাহিরের মধ্যে অপূর্ব এক সেতু রচনা করতে সমর্থ হয়েছিলেন। সকলের কাছে তিনি প্রশান্তি, পরিতৃপ্তি, স্থৈর্যের প্রতিমূর্তি হিসাবে বিবেচিত হয়েছেন। তাঁর আন্তরিকতা, মিষ্টি ব্যবহার ও মধুর আচরণে সবাই মুগ্ধ হয়েছেন। একদা রামানুজনের সহপাঠী এন রঘুনাথন বলেছেন যে, রামানুজন এমন সরল ও হৃদয়বান মানুষ ছিলেন যে, কেউ তাঁর প্রতি কখনো 'unfriendly' হতে পারত না। একই ধরনের মন্তব্য করেছেন অধ্যাপক কে আনন্দ রাও। রামানুজন যখন ট্রিনিটি কলেজে, আনন্দ রাও তখন কিংস কলেজের ছাত্র। তিনি বলেছেন, 'In his nature he (Ramanujan) was simple, entirely free from affection, with no trace whatever of his being self-conscious of his abilities. He was quite sociable, very polite and considerate to others'।

রামানুজনের আচরণ প্রসঙ্গে নেভিলের মন্তব্য হল, 'রামানুজনের ব্যবহার ছিল আদর্শস্থানীয়। সে জন্য সবাই তাঁর বন্ধুত্ব ও সঙ্গ কামনা করত। সাফল্য বা খ্যাতি কোনো কিছুই তাঁর স্বভাবের সারল্যকে প্রভাবিত করতে পারে নি।' তিনি নিজস্ব পদ্ধতিতে অপরের প্রতি স্নেহ, ভালোবাসা বা কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করতেন। অপরের উপকারকে শ্রদ্ধার সঙ্গে স্বীকার করা ছিল তাঁর চরিত্রের বিশেষ বৈশিষ্ট্য। হার্ডি বলেছেন, 'Ramanujan was almost absurdly scrupulus in his desire to acknowledge the slightest help.'

অপরের দুঃখে বা প্রয়োজনে তিনি সব সময় এগিয়ে আসতেন। অন্যের প্রতি সহানুভূতি ছিল উল্লেখ করার মতো। বৃহৎ হৃদয় ও নমনীয় চরিত্রের 'এই বিস্ময়কর গণিত প্রতিভা মানুষ হিসাবে ছিলেন খুব ভালো লাগার আর খুব ভালোবাসারও'। নেভিলের এ মন্তব্যের সপক্ষে নানা ঘটনার কথা বলা যেতে পারে।

লাজুক ও শান্ত প্রকৃতির রামানুজন কোনো আলোচনার সময় নীরব শ্রোতা হিসাবে অন্যের বক্তব্য মন দিয়ে শুনতেন। তবে যখন নিজের মত প্রকাশ করতেন, তখন তা স্পষ্টভাবে ও খোলাখুলি ভাবে প্রকাশ করতে দ্বিধা করতেন না। দর্শন ও তাঁর প্রিয় বিষয় সম্বন্ধে তিনি বেশ উৎসাহের সঙ্গেই আলোচনা করতেন। তিনি বেশ সুরসিকও ছিলেন। তাঁর কাছে নানান মজার গল্পের ভাণ্ডার ছিল বলে নেভিল মন্তব্য করেছেন।

বিনয় ছিল রামানুজনের চরিত্রের অন্য গুণগুলির মধ্যে একটি। বেশি প্রশংসায় তিনি বিব্রত বোধ করতেন। যখন হার্ডি অয়লার ও জ্যাকোবির সঙ্গে তাঁর তুলনা করতেন, তখন রামানুজন বলতেন যে, এঁরা হলেন গণিত জগতের অসাধারণ চরিত্রের, আর তিনি গণিতের ক্ষেত্রে খুব নগণ্য কিছু করেছেন। ভুলত্রুটি নিয়ে তিনি একজন সামান্য মানুষ— সত্যে পৌঁছোবার চেষ্টা করছেন মাত্র। রামানুজন যে এ কথাগুলো বলতেন, তা কথার কথা নয়। তিনি সত্যিকারের অন্তর থেকেই এ মন্তব্য করতেন।

রামানুজনের চরিত্রের উল্লেখিত গুণাবলী সম্বন্ধে কোনো মতান্তর না থাকলেও তাঁর ধর্মমত সম্বন্ধে ভিন্ন ভিন্ন মত পাওয়া যায়।

সেশু আয়ার এবং রামচন্দ্র রাও তাঁদের লেখা রামানুজনের জীবনীতে তাঁর ধর্মমত সম্বন্ধে বলতে গিয়ে বলেছেন যে, ধর্ম সম্বন্ধে রামানুজনের নির্দিষ্ট দৃষ্টিভঙ্গী ছিল। 'He believes in the existence of Supreme Being and in attainment of Godhood by proper method of service and realization of oneness with the Deity'। ইহজীবন ও পরজীবন সম্বন্ধে তাঁর ধারণাগুলি এমন দৃঢ়ভাবে গ্রথিত ছিল যে অবধারিত মৃত্যুর হাতছানিও তাঁর দক্ষতা ও চেতনাকে নাড়া দিতে পারে নি। রাত্রে স্বপ্নে নাম্মাকলের দেবী রামানুজনকে সূত্র জানিয়ে দিতেন বলেও তাঁরা মন্তব্য করেছেন।

স্বপ্নে দেবী দত্ত ফল পাওয়ার ঘটনাকে হার্ডি আমল দেন নি। তিনি বিশ্বাস করতেন না যে 'রামানুজন অতীন্দ্রিয়বাদী (mystic) ছিলেন', সাদামাটা পার্থিব ধ্যানধারণা ছাড়া রামানুজনের জীবনে ধর্মের কোনো প্রভাব লক্ষ করেন নি। তিনি

নিজের জাতের ধর্মীয় আচার খুব কড়াকড়ি ভাবে মানতেন, যা ইংল্যান্ডে বসবাসকারী ভারতীয়রা পালন করতেন না। এ কথা হার্ডি বললেও তাঁর মন্তব্য 'But his religion was matter of observance and not an intellectual conviction.' তিনি বলেছেন যে, রামানুজন রীতিনীতি এমন সূক্ষ্মভাবে মেনেছেন, কারণ তিনি তাঁর বাবা-মাকে কথা দিয়েছিলেন— তা ঠিকভাবে মানবেন।

রামানুজনের ধর্মকে আচারমাত্রিক মনে করার কারণ হিসাবে হার্ডি বলেছেন, 'মনে আছে, একদিন আমাকে অবাক করে দিয়ে বলেছিলেন, সব ধর্মই মোটামুটি এক, একই সত্যের পথিক।' তাছাড়া এ ব্যাপারে আরো যুক্তি তিনি খাড়া করেছেন। হার্ডির যুক্তির সপক্ষে বলা যায় যে রামানুজন ছোটবেলা থেকে আয়েঙ্গার ব্রাহ্মণদের আচরণে ভীষণভাবে অভ্যস্ত হয়েছিলেন এবং এই অভ্যাস তিনি সারা জীবন ধরে পালন করেছেন। ক্যানিগেল রামানুজন যেভাবে বড়ো হয়ে উঠেছিলেন, সে কথা বর্ণনা করতে গিয়ে বলেছেন, 'From his mother, Ramanujan absorbed tradition, mastered doctrines of castes, learned puranas ....'।

জানকী দেবীর স্মৃতি চারণা রামানুজনের ধর্ম প্রসঙ্গে আরো কিছুটা আলোকপাত করতে পারে। 1987 সালে তিনি বলেছিলেন যে, গণিতের আকর্ষণে রামানুজন এমন মগ্ন থাকতেন যে তিনি মন্দিরে যাবার সময় পেতেন না। এমন কি ইংল্যান্ড থেকে ফিরে আসার পর রামানুজনের নাম্মাকলের মন্দিরে যাওয়া হয়ে ওঠেনি। আর স্বপ্নে সূত্র পাওয়ার ব্যাপারটা মনস্তাত্ত্বিক দিক দিয়ে বিচার করলে, তার একটা ব্যাখ্যা পাওয়া যায়। দেখা গেছে কোনো একটি সমস্যা নিয়ে খুব গভীর ভাবে সব সময় চিন্তা করলে অবচেতন মনে তার সমাধানের কথা নিরন্তর বিচরণ করে এবং অনেক সময় সমাধানটি স্বপ্নে চোখের সামনে ভেসে ওঠে। এ ঘটনা সাধারণ ব্যক্তির ক্ষেত্রে ঘটলে, রামানুজনের ক্ষেত্রে এ রকম ঘটা অস্বাভাবিক কিছু নয়।

গণিত বাদ দিয়ে অন্য বিষয়ে রামানুজনের আগ্রহের কথা জানাতে গিয়ে হার্ডি বলেছেন যে, গণিতের মতো অন্য ব্যাপারেও তাঁর আশ্চর্যজনক বৈপরীত্য লক্ষ করা যায়। তিনি বলেছেন, '....like in literature, philosophy and mathematics he had passion for what was unexpected, strange and odd.'

যশ, পদমর্যাদা, ক্ষমতা বা প্রভাব বিস্তারের প্রতি রামানুজনের কোনো লোভ বা মোহ ছিল না। একমাত্র গণিতসাধনার মধ্যে তিনি জীবনের সার্থকতা খুঁজেছেন। গণিত ভাণ্ডারে নূতন কিছু দিয়ে যাবার উদগ্র কামনা ও তীব্র তাড়না যেন ভিতর থেকে

তাঁকে নাড়া দিয়েছে। নিঃশেষে দিয়ে যাবার আকৃতির প্রচণ্ড দহনে যেন তিনি নিজেকে সঁপে দেবার ব্রত নিয়েছিলেন। তাঁর ব্রত যে সফল সে বিষয়ে কোনো সন্দেহ নেই।

রামানুজনের কাজ ও তার সম্ভাবনা সম্বন্ধে বলতে গিয়ে ডাইসন বিভাজনের বিভাজ্যতার ধর্মাবলী প্রসঙ্গ তুলে বলেছেন,'He discovered so much and yet he left so much more in his garden for other people to discover'। রামানুজনের জন্ম শতবর্ষ পালন অনুষ্ঠানে বলেছেন যে, তিনি গত চুয়াল্লিশ বছর ধরে মাঝে মাঝে রামানুজনের বাগানে আসেন এবং প্রতিবারেই আবিষ্কার করেন যে তাজা ফুল ফুটে চলেছে।

বিভাজন নিয়ে হার্ডি ও রামানুজনের যৌথ কাজকে এক অসাধারণ আবিষ্কার হিসাবে গণ্য করা হয়। শুধু এই কাজ তাঁদের গণিত ইতিহাসে অমর করে রাখার পক্ষে যথেষ্ট। বিভাজনের উপপাদ্য সম্বন্ধে বলতে গিয়ে লিটলউড বলেছেন, 'We owe to the theorem to a singularly happy collaboration of two men, of quite unlike gifts, in which each contributed the best, most characteristic, and most fortunate that was in him'। তবে এই আবিষ্কারে রামানুজনের ভূমিকা বিরাট করে দেখিয়েছেন কেমব্রিজের গণিতজ্ঞ বেলা বোল্লাবাস (Bela Bollabas)। তিনি বলেছেন যে, এই সমস্যাকে আয়ত্ত করার জন্য যে 'technical skill' হার্ডি সরবরাহ করেছেন, তা মরডেলও করতে পারতেন, পোলিয়াও (Polya) করতে সমর্থ ছিলেন। তাঁর দৃঢ় বিশ্বাস আরো কয়েকজন গণিতজ্ঞ হার্ডির ভূমিকা পালন করতে পারতেন। 'But Ramanujan's role in that particular patnership I don't think could have been played at that time by anybody else', বলে তিনি মন্তব্য করেছেন।

এ প্রসঙ্গে মরডেল বলেন যে, উপপাদ্যটির প্রমাণের জন্য জটিল চলরাশির অপেক্ষকের সমাকল সংক্রান্ত কোশির উপপাদ্য প্রয়োজন, যার সম্বন্ধে রামানুজন কিছু জানতেন না ; কিন্তু এটা স্থির নিশ্চিত যে এ রকম সমাধান থাকার সম্ভাবনার কথা রামানুজনের মাথায় আসে এবং সমাধানের আকার সম্বন্ধে তিনিই প্রথম আভাস দেন।

রামানুজনের অনুমানগুলির ব্যাপকতা, গভীরতা ও গুরুত্ব নিয়ে আজ সবাই উদ্দীপিত। এই উক্তির অনুকূলে একটি কাহিনী বলা যাক। কাহিনীটি টাও-অনুমান (Tau conjecture) নামে খ্যাত। অনুমানটিকে 1916 সালে রামানুজনের মাথা থেকে এসেছিল। তাঁর অনুমান ছিল

$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$, যেখানে p মৌলিক সংখ্যা

এবং $\tau(p)$ সংজ্ঞায়িত হয় নিচের মতো :

$$g(x) = x\ \{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \ldots\}^{24}$$

$$= \sum_{n=1}^{\alpha} \tau(p)x^n$$

টাও-অনুমান সম্বন্ধে একজন মন্তব্য করেছিলেন যে অনুমানটি 'kept at bay a galaxy of distinguished mathematicians for nearly six decades'। এর প্রমাণ সংখ্যা তত্ত্বে দীর্ঘদিনের খোলা সমস্যা (open problem) হিসাবে প্রচলিত ছিল। 1940 সালে সমস্যাটি কী পরিমাণ আগ্রহ এবং সমাধানে কী পরিমাণ বাধা সৃষ্টি করেছিল, সে সম্বন্ধে হার্ডি কিছুটা বিবরণ দিয়েছিলেন। এর আগে অনুমানটি জানার দু বছর পর হার্ডি অনুমানের কাছাকাছি পৌঁছোতে চেষ্টা করেন। তারপর 1927 সালে ক্লুস্টারম্যান (Kloosterman), 1933 সালে সালি (Salie) এবং 1939 সালে রবার্ট র‍্যানকিন অনুমানটির প্রায় কাছাকাছি পৌছবার চেষ্টা করেন। অবশেষে 1974 সালে বেলজিয়ামের গণিতজ্ঞ পিয়েরি ডেলিন (Pierre Deligne) সফল হন। তিনি 'বীজগাণিতিক জ্যামিতি'-র (algebraic geometry) সাহায্য নিয়ে অনুমানটির প্রমাণ করেন এবং এই ঘটনাকে বিংশ শতাব্দীর গণিতের 'one of the celebrated events' হিসাবে গণ্য করা হয়। এই কৃতিত্বের জন্য ডেলিনকে 'ফিল্ডস মেডাল' (Fields Medal) দেওয়া হয়। উল্লেখ করা যেতে পারে, ফিল্ডস মেডালকে গণিতে নোবেল পুরস্কার হিসাবে বিবেচনা করা হয়।

এই একটি কাহিনীই রামানুজনের গাণিতিক অনুমানগুলির অসাধারণতা সম্বন্ধে অন্তত কিছুটা হদিশ দেয়। ডাইসন যথার্থই বলেছেন, 'রামানুজনের অনুমানগুলি শুধু সুন্দর সূত্র নয়, এদের মধ্যে সম্পদ ও গভীরতা আছে।'

রামানুজনের গাণিতিক কাজের মূল্যায়ন করতে গেলে অনেক সময় বিশেষণের অপ্রতুলতায় ভুগতে হয়। তাঁর কাজের 'riches, beauty and mystry—its sheer mathematical loveliness' সবাইকে বিস্মিত করে। শুধু তাই নয়, তাঁর কাজ গণিতের ভাণ্ডারে নূতন সৌন্দর্য ও সম্পদ সংযোজন করে।

ওয়াটসন ও উইলসন রামানুজনের নোটবইয়ের সম্পাদনার কাজে যুক্ত থেকে নিজেদের সার্থক মনে করেন। ব্রুস বার্ন্ট রামানুজনের নোটবইয়ের সম্পাদনা করে পঞ্চম খণ্ডের ভূমিকায় লেখেন, 'These volumes will serve as spring-boards for further investigations intrigued by Ramanujan's remarkable ideas'।পল ইড়োজ (Paul Erdos) এবং মার্ক কক (Mark Kac) রামানুজন ও হার্ডির যৌথ গবেষণা পত্র পড়ে প্রভাবিত হয়ে গবেষণা করে এমন প্রবন্ধ লিখলেন যা 'সম্ভাবনাময় সংখ্যাতত্ত্ব' -এর (Probabilistic number theory) সূচনা করল।

রামানুজনের গণিতভাবনার সান্নিধ্যে এসে তাঁর প্রশংসায় ও তাঁর কাজের বিশালত্বে নানা মহান ও বিশিষ্ট ব্যক্তি প্রভাবিত হয়েছেন।প্রত্যেকেই রামানুজনের মূল্যায়ন করেছেন ভিন্ন ভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে। এখানে রামানুজন সম্বন্ধে তাঁদের কিছু কিছু স্তুতি ও স্বীকৃতির মাধ্যমে আমরা রামানুজনের অনন্যতাকে বুঝতে পারব বলে আমার বিশ্বাস।

জীবনীকার ক্যানিগেলের একটি মন্তব্য : 'The great tree that was Ramanujan's works sent its roots down deep and far.' এবং তাই 'What Ramanujan did will live forever.'

নরওয়ের বিখ্যাত সংখ্যাতত্ত্ববিদ সেলবার্জ (Selberg) বলেছেন, 'আগামী কয়েক দশকের মধ্যে রামানুজনের গণিতের পূর্ণ প্রভাব আমরা বুঝতে পারব এবং তাঁকে জানতে সক্ষম হব।... গাণিতিক সমাধানের ক্ষেত্রে রামানুজন ছিলেন ইতিহাসের অপ্রতিদ্বন্দ্বী।'

'Men of mathematics' গ্রন্থে ই টি বেল (E.T. Bell) বলেছেন, 'Even expert analysts hail Ramanujan as a gift from heaven ; his all but supernatural insight into apparently unrelated formulas reveals hidden trails leading from one territory to another, and the analysts have new tasks provided for them in clearing the trails.'

নোবেলজয়ী সুব্রমনিয়ান চন্দ্রশেখর মন্তব্য করেছেন, 'যতদিন মানুষ গণিত অনুশীলন করবে, ততদিন রামানুজনের কাজ প্রশংসা পেতে থাকবে।'

আমেরিকার সংখ্যাতত্ত্ববিদ রবার্ট কারমাইকেল (Robert Carmichael) বলেছিলেন, 'আমাদের প্রজন্মে শ্রীনিবাস রামানুজনের চেয়ে আরো বেশি কোনো রোমান্টিক চরিত্র গণিত পরিমণ্ডলে ঘোরাফেরা করে নি।'

মরডেল রামানুজন সম্বন্ধে বলতে গিয়ে বলেছেন, 'তাঁর জীবনের গল্প হল প্রচণ্ডতম বাধার সম্মুখীন হয়ে একজন অখ্যাত ভারতীয়দের ভারতে জাত এ পর্যন্ত সবচেয়ে বিখ্যাত গণিতজ্ঞের স্থানে উন্নীত হবার কাহিনী আর তাঁর এমন অকাল মৃত্যুর কাহিনী ঠিক যখন তিনি সবচেয়ে লোভনীয় সম্মান পেয়েছিলেন।'

কম্পিউটার বীজগণিতের প্রোগ্রাম যদি রামানুজনের সময়ে আবিষ্কৃত হত এবং রামানুজন যদি এর সুযোগ পেতেন, তা হলে তিনি আরো কত মহান আবিষ্কার করতে পারতেন বলে মন্তব্য করে, পর মুহূর্তে জর্জ এন্ড্রুজ বলেন, 'More often I get the feeling he was such a brilliant, clever and intuitive computer himself that he really did not need them.'

আর রিচার্ড আসকে রামানুজনের হারানো নোটবইয়ের কাজের মৌলিকতা ও ব্যাপকতা সম্বন্ধে বলতে গিয়ে বলেছেন, 'রামানুজন তাঁর জীবনের শেষ বছরে মুমূর্ষু অবস্থায় যে আবিষ্কার করে গেছেন, তার অর্ধেক আবিষ্কার কোনো গণিতজ্ঞ যদি সারা জীবনে করেন, তাহলেই আমরা তাঁর প্রশংসায় পঞ্চমুখ হই।'

হার্ডি তাঁর হার্ভার্ড বক্তৃতায় রামানুজনের মূল্যায়নে তাঁর সাফল্য ও ব্যর্থতা সম্বন্ধে বলতে গিয়ে রামানুজনের ব্যর্থতাকে মহিমান্বিত করতে দ্বিধা করেন নি। তিনি বলছেন, 'This much perhaps we may say, that his failure is one which, on the balance, should increase and not diminish our admiration for his gifts, since it gives us additional, and surprising, evidence of this imagination and versatility.'

সত্যি রামানুজনের জীবন ও গাণিতিক কাজের অন্তর্নিহিত রহস্য এতই পরিব্যাপ্ত যে তা আজও উন্মোচনের অপেক্ষায় আছে। তাই তো জীবনীকার সুরেশ রাম যথার্থই বলেছেন, 'রামানুজনের জীবন হিমশৈলের মতো যার বেশি অংশই জলের তলায় লুক্কায়িত, উপর থেকে ক্ষুদ্র অংশই দৃশ্যমান।'

রামানুজনের গণিতের ব্যাপকতা ও গভীরতার সঙ্গে এক মাদকতাও যেন জড়িয়ে আছে। সে সম্বন্ধে কিছুটা আভাস একটা ঘটনা থেকে পাওয়া যেতে পারে। 1921 সালের কোনো এক সময়ে জর্জ পলিয়া অক্সফোর্ড এসেছেন। হার্ডির সঙ্গে দেখা হল এবং তিনি হার্ডির কাছে রাখা রামানুজনের নোটবই নিয়ে গেলেন। তখনও নোটবইটির কোনো উপপাদ্য সম্বন্ধে কোনো লেখা প্রকাশিত হয় নি। নোট বই নিয়ে যাবার কিছুদিন পরেই তিনি হন্তদন্ত হয়ে এসে এগুলি হার্ডিকে ফেরৎ দিয়ে যেন মুক্তি পান। যে মানসিক অবস্থার মধ্যে তিনি এগুলি ফেরৎ দিয়েছিলেন, তা জানাতে গিয়ে ক্যানিগেল 'in something like a panic' বলে বর্ণনা করেছেন। তিনি নোটবই কাছে রাখতে চান নি, কারণ, তিনি যদি রামানুজনের সম্মোহক উপপাদ্যের জালে ধরা পড়েন তাহলে জীবনের বাকিটা সময় তা প্রমাণ করার কাজে অতিবাহিত হবে, নিজের থেকে নূতন কিছু আবিষ্কার করতে পারবেন না।

তাই নেভিল যথার্থই বলেছেন, 'শ্রীনিবাস রামানুজন এমন মহান ছিলেন যে তাঁর নাম ঈর্ষার উদ্রেক করে। বিগত হাজার বছরে তাঁর মতো অতুলনীয় মহান গণিতজ্ঞ ভারতে জন্ম গ্রহণ করে নি।' প্রসঙ্গক্রমে রামানুজনের মূল্যায়ন করার প্রয়াসে হার্ডি বিভিন্ন গণিতজ্ঞদের যে মান নির্ণয় করেছিলেন তা উল্লেখ করা যেতে পারে। খাঁটি স্বাভাবিক প্রতিভার নিরিখে তিনি গণিতজ্ঞদের 0 থেকে 100 নম্বর যে দিয়েছিলেন তা আমরা পল ইডোজের কাছ থেকে জানতে পারি। তাঁর মানদণ্ডে 100 নম্বরের মধ্যে হার্ডি নিজেকে 25, লিটলউডকে 30, হিলবার্টকে 80 এবং রামানুজনকে পুরো 100 দেন। অবিস্মরণীয় গণিতজ্ঞ হিলবার্টের চেয়ে রামানুজনকে এতটা এগিয়ে রাখার মানে রামানুজনের প্রতিভাকে কীভাবে সম্মান ও স্বীকৃতি দেওয়া, তা আমাদের বুঝতে অসুবিধা হয় না।

অনন্য প্রতিভার অধিকারী শ্রীনিবাস রামানুজন শুধু বিজ্ঞান ইতিহাসের রোমান্টিক চরিত্রই নয়, তিনি তাঁর অবিস্মরণীয় কীর্তি দিয়ে বিশ্বের দরবারে আমাদের সুপ্রতিষ্ঠিত করেছেন। 1941 সালে অধ্যাপক নেভিল রেডিওতে রামানুজনের উপর বলার জন্য যে বক্তৃতা প্রস্তুত করেন, তা অনুসরণ করলেই বিষয়টি আমাদের কাছে আরো স্পষ্ট হবে। তিনি বলেছিলেন যে, সমস্ত ভারতীয়দের মধ্যে রামানুজন হলেন প্রথম যাঁকে ইংরেজরা স্বাভাবিকভাবে তাদের সর্বশ্রেষ্ঠ ব্যক্তির সমতুল্য হিসাবে জেনেছিল। 'The mortal blow to the assumption, so prevalent in the western world, the white is intrinsically superior to black, ..., was struck by the hand of Srinivasa Ramanujan.'

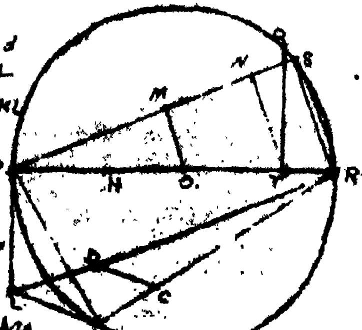
গণিতের পরম বিস্ময় শ্রীনিবাস রামানুজন আমাদের গর্ব, আমাদের অহঙ্কার। শিক্ষা নেবার উপাদানের অফুরন্ত উৎস যেন তাঁর জীবন। সত্যিই 'Ramanujan's life can be made to serve as parable for almost any lesson you want to draw from it'। তাঁর সংক্ষিপ্ত জীবনের ঘাত-প্রতিঘাত, সংকল্প-সাধনা, সংগ্রাম-সাফল্যের নানা কাহিনীর মধ্যে উৎকৃষ্ট নাট্যগুলির সমাবেশ দেখে এবং তাঁর গণিত-ভাবনার গভীরতা, রত্ন-সম্ভার ও সম্ভাবনার কথা জেনে সত্যিই আমরা আবিষ্ট হই। এক অবশ করা অথচ মনোরম অনুভূতি এসে আপ্লুত করে আমাদের হৃদয়, মন, অন্তর এবং সমগ্র সত্তাকে।

রামানুজনকে শ্রদ্ধা জানানোর জন্য ভারত সরকার এই ডাকটিকিটটি 1962 সালে প্রকাশ করে যা হল বইটির প্রচ্ছদের ছবি

দ্বিতীয় ভাগ

গণিত ভাবনা

2. To construct a square equal to a given circle.
Let O be the centre and PR any diameter.
Bisect OP at H and trisect OR at T. Draw TQ perp to OR.
Draw RS = TQ. Join PS.
Draw OM & TN ∥ to RS.
Draw PK = PM; & PL = MN and perp to OP. Join RL, RK & KL.
Cut off RC = RH. Draw CD ∥ to KL.
Then $RD^2 = \odot PQR$.
N.B. RD is $\frac{1}{10}$th of an inch greater than the true length of the given ⊙ is 14 Sq. miles in area.



Cor. 1. One of the two mean proportionals between a side of an equilateral triangle inscribed in the ⊙ and the length PS is only less by 30000 th part of it than the true length.

Cor. 2. The app. length got by assuming $\pi = \sqrt[4]{97\frac{1}{2} - \frac{1}{11}}$ is $\frac{1}{10}$th of an inch less than the true length of the ⊙ is 8 millions square miles in area.

ii. $\{6m^2+(3m^2-m)\}^3 + \{6m^2-(3m^2+m)\}^3 = \{6m^2(3m^2+1)\}^2$

iii. $\{m^7-3m^4(1+p)+m(3(1+p)^2-1)\}^3$
$+\{2m^6-3m^3(1+2p)+(1+3p+3p^2)\}^3$
$+\{m^6-(1+3p+3p^2)\}^3 = \{m^7-3m^4p+m(3p^2-1)\}^3$

ex. $(11\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^3 = 39^2$; $(3-\frac{1}{102})^3 + (\frac{1}{102})^3 = (5\frac{[illegible]}{51})^2$
$(1\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^3 = ([illegible])^2$; $(3\frac{1}{102})^3 - (\frac{1}{102})^3 = (5\frac{[illegible]}{102})^2$.
$3^3+4^3+5^3 = 6^3$; $1^3+12^3 = 9^3+10^3$; $1^3+75^3 = [illegible]$
$3^3+[illegible]^3+36^3 = 1188^3$; $18^3+19^3+21^3 = 28^3$
$7^3+14^3+17^3 = 20^3$; $19^3+60^3+69^3 = 82^3$; $15^3+[illegible]^3+[illegible]^3$
$= [illegible]^3$; $3^3+36^3+37^3 = 46^3$; $1^3+135^3+138^3 = 172^3$.

রামানুজনের দ্বিতীয় নোটবইয়ের 224 পৃষ্ঠার শেষ তিন লাইন
এবং 225 পৃষ্ঠার ফটোকপি

গণিত ভাবনা

রামানুজনের জীবনের নানা কাহিনীর মাধ্যমে এটা স্পষ্টত প্রতীয়মান যে, বিষয় গণিত এবং ব্যক্তি রামানুজন মিলে মিশে একাকার। তাই রামানুজনে গণিত ভাবনার কিছু পরিচয় ছাড়া তাঁর কাহিনী সম্পূর্ণতা পেতে পারে না। তাঁর গণিতকীর্তির বিবরণ যে সব বই বা নথিপত্রে ধরা আছে, তার বিবরণ আমরা প্রথম ভাগে জেনেছি। তাঁর গণিত গবেষণার বহুমুখী ক্ষেত্রগুলি হল অবকল ভগ্নাংশ, ক্রমিক ভগ্নাংশ, অসীম শ্রেণী, পরা জ্যামিতিক শ্রেণী, অপেক্ষক তত্ত্ব, উপবৃত্তীয় মডিউলার অপেক্ষক, জিটা অপেক্ষক, টাও অপেক্ষক, মক-থিটা অপেক্ষক, নির্দিষ্ট সমাকল, সংখ্যা তত্ত্বের বিভিন্ন শাখা যেমন মৌলিক সংখ্যা, যৌগিক সংখ্যা, বিভাজন তত্ত্ব প্রভৃতি। তবে এটা বলা দরকার যে, গণিতশাস্ত্রে রামানুজনের সমস্ত গণিতভাবনার ছবি সকলের কাছে বোধগম্য করে তুলে ধরা শুধু দুরূহ কাজ নয়, প্রায় অসম্ভব। উচ্চতর গণিতের সঙ্গে যথাযথ পরিচয় না থাকলে, বিশেষ করে সংখ্যাতত্ত্বে বিশেষভাবে পারদর্শী না হলে রামানুজনের সমগ্র কাজকে বোঝা সম্ভব নয়। তাই এখানে তাঁর এমন কিছু প্রাথমিক কাজ তুলে ধরার চেষ্টা করব যার সাহায্যে রামানুজনের গণিত প্রতিভার উজ্জ্বলতাকে অন্তত কিছুটা বোঝা সম্ভব হবে।

1. বিভিন্ন ঘাতে উন্নীত সংখ্যা সমূহের মধ্যে সম্পর্ক

রামানুজনের গাণিতিক কাজকর্মের মধ্যে, বিশেষ করে তাঁর নোটবইতে ছড়িয়ে থাকা নানা কাজের মধ্যে, এটা জানা গেছে যে তিনি নানা ঘাতে উন্নীত সংখ্যাসমূহের মধ্যে সম্পর্ক জানার ব্যাপারে বিশেষ আগ্রহী ছিলেন। তিনি অনেক সংখ্যার শুধু ঘন নির্ণয় বা তাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করেই ব্যাপারটায় ইতি টানেন নি, তাঁর অসাধারণ স্মৃতিশক্তির সাহায্যে তা মনেও রেখেছেন। তিনি দিওফান্তীয় সমীকরণ (Diophantine equation)

$$x^3 + y^3 = u^2$$

এবং অয়লার সমীকরণ (Euler equation)

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3$$

নিয়ে চিন্তা-ভাবনা করেছেন, সমাধানের নানা উদাহরণও লিখে রেখেছেন। সংখ্যার

সঙ্গে তাঁর সম্পর্ক নিবিড় থেকে নিবিড়তর হয়েছে। তিনি সংখ্যার বিচিত্র রাজ্যে ঘোরাফেরা করে তাদের আত্মস্থ করেছেন। অধ্যাপক হার্ডির কথায় 'He (Ramanujan) could remember the idiosyncracies of numbers in an almost uncanny way' এবং সেইজন্যই অধ্যাপক লিট্‌লউডের মন্তব্য 'প্রত্যেকটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ছিল রামানুজনের ব্যক্তিগত বন্ধুদের অন্যতম'।

এ প্রসঙ্গে একটি ঘটনার কথা বলব যা রামানুজন সম্বন্ধে কিছু খোঁজখবর রাখেন এমন প্রত্যেকটি লোকেরই জানার কথা। ইংল্যান্ডে অবস্থানকালে রামানুজন যখন অসুস্থ হয়ে রোগশয্যায় শায়িত, তখন তাঁকে দেখতে এসেছেন হার্ডি। তিনি যে গাড়ি করে রামানুজনের কাছে এসেছেন তার নম্বর ছিল 1729। এসে তিনি তাঁর চেপে আসা গাড়ির নম্বর 1729 সম্বন্ধে বললেন, এই সংখ্যাটা 'seemed to me rather a dull one'। সংখ্যাটিকে 7, 13, 19 এই তিনটি মৌলিকসংখ্যার গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা ছাড়া আর কোনো বিশেষত্ব তখনকার মত অধ্যাপক হার্ডির মনে আসেনি। কিন্তু সংখ্যাটি জানার পর রামানুজনের চোখ দুটি যেন উজ্জ্বল হয়ে উঠল। উদ্ভাসিত রামানুজন বললেন 'না, সংখ্যাটা খুব আর্কষণীয়'। এর অনন্যতা সম্বন্ধে বলতে গিয়ে রামানুজন বলেলেন যে, এটা হল ক্ষুদ্রতম এমন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা যাকে দুটি ভিন্নভাবে দুটি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যার ঘনের (cube) যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$$\begin{aligned} 1729 &= 10^3 + 9^3 \\ &= 12^3 + 1^3 \end{aligned}$$

তখন অধ্যাপক হার্ডি চতুর্থঘাতের অনুরূপ গাণিতিক সমস্যার সমাধানের কথা তাঁকে জিজ্ঞেস করেন অর্থাৎ এমন ক্ষুদ্রতম স্বাভাবিক সংখ্যার কথা রামানুজনের জানা আছে কি, যাকে দুটি ভিন্নভাবে দুটি সংখ্যার চতুর্থঘাতের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যাবে। উত্তরে রামানুজন একটু থেমে বললেন যে, সেই মুহূর্তে এমন সংখ্যা তাঁর মনে আসছে না ; তবে সংখ্যাটি খুব বড় হবে। সত্যিই তাই, সংখ্যাটি নয় অঙ্ক বিশিষ্ট। 635318657 হল সেই সংখ্যা যাকে প্রকাশ করা যাবে $(133^4 + 134^4)$ অথবা $(59^4 + 158^4)$ হিসাবে। উল্লেখ করা যেতে পারে সংখ্যাটি অয়লার নির্ণয় করেছিলেন।

সংখ্যাকে মনে রাখা বা সংখ্যা সম্বন্ধীয় সম্পর্ককে মনে রাখার ব্যাপারে রামানুজনের অসাধারণ স্মৃতিশক্তির কথা বলা হয়। 1729 সংখ্যা-প্রসঙ্গটি এই অভিমতকে সুদৃঢ়ভাবে প্রতিষ্ঠা করে। উল্লেখ করা যেতে পারে, '1729' এই সংখ্যাটি

বিভিন্ন ঘাতে উন্নীত সংখ্যা সমূহের মধ্যে সম্পর্ক

রামানুজনের নোটবইতে কোথাও লেখা নেই, তবে '$10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$' সম্পর্কটির উল্লেখ তাঁর নোটবইয়ের দু'জায়গায় (Vol – 2, P – 266, 387) এবং ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে তাঁর পাঠানো তিনটি প্রশ্নে উল্লেখ করা হয়েছে। যেমন,

প্রশ্ন নং - 661

পূর্ণ সংখ্যায় সমাধান কর

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^6$$

এবং নিচের সম্পর্কগুলি প্রতিষ্ঠা কর

$6^3 - 5^3 - 3^3 = 2^6$, $\quad 8^3 + 6^3 + 1^3 = 3^6$,

$\boxed{12^3 - 10^3 + 1^3 = 3^6,}$ $\quad 46^3 - 37^3 - 3^3 = 6^6$,

$174^3 + 133^3 - 45^3 = 14^6$, $\quad 1188^3 - 509^3 - 3^3 = 34^6$.

প্রশ্ন নং - 681

পূর্ণ সংখ্যায় সমা ধান কর

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

এবং নিচের সম্পর্কগুলি প্রতিষ্ঠা কর

$3^3 + 8^3 = 9^3 - 1$, $\quad \boxed{9^3 + 10^3 = 12^3 + 1,}$

$135^3 + 138^3 = 172^3 - 1$, $\quad 793^3 + 812^3 = 1010^3 - 1$,

$11161^3 + 11468^3 = 14258^3 + 1$,

$65601^3 + 67402^3 = 83802^3 + 1$.

তাছাড়া তাঁর নোটবইতে একটি উপপাদ্যের উল্লেখ করা আছে, যা হল :

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3\lambda\gamma^2$ হলে

$(\alpha+\lambda^2\gamma)^3 + (\lambda\beta+\gamma)^3 = (\lambda\alpha+\gamma)^3 + (\beta+\lambda^2\gamma)^3$ হবে।

মজা হল, এখানে $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ এবং $\lambda = 3$ বসালে উপরের উল্লিখিত গাড়ির স মস্যাটির সমাধান পাওয়া যায়, অর্থাৎ

$$\boxed{12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3 = 1729}$$

এখানে বোধহয় উল্লেখ করা অপ্রাসঙ্গিক হবে না যে, পরবর্তীকালে 1729 সংখ্যাটির আরো কিছু বৈশিষ্ট্য লক্ষ করা গেছে। এখন 1729 সংখ্যাটিকে এবং যে সংখ্যাকে দুটি ভিন্নভাবে দুটি সংখ্যার ঘনর যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায় তাকে

'রামানুজন সংখ্যা' বলে অভিহিত করা হয়। এখানে এধরনের কিছু সংখ্যার উদাহরণ দেওয়া হল :

$$
\begin{aligned}
4101 &= 16^3 + 2^3 &&= 15^3 + 9^3 \\
13832 &= 24^3 + 2^3 &&= 20^3 + 18^3 \\
40033 &= 34^3 + 9^3 &&= 33^3 + 16^3 \\
64232 &= 39^3 + 17^3 &&= 36^3 + 26^3 \\
110808 &= 48^3 + 6^3 &&= 45^3 + 27^3 \\
149389 &= 53^3 + 8^3 &&= 50^3 + 29^3 \\
171288 &= 55^3 + 17^3 &&= 54^3 + 24^3 \\
842751 &= 94^3 + 23^3 &&= 84^3 + 63^3 \\
2418271 &= 134^3 + 23^3 &&= 116^3 + 95^3 \\
7620661 &= 174^3 + 133^3 &&= 196^3 + 45^3
\end{aligned}
$$

এখন 1729 -এর বৈশিষ্ট্যগুলি বলা যেতে পারে :

(i) 1729 -এর সমস্ত উৎপাদকের গুণফল 1729 এর চতুর্থঘাতের সমান; অর্থাৎ, $1 \times 7 \times 13 \times 19 \times 91 \times 133 \times 247 \times 1729 = 1729^4$;

(ii) 1729 ছাড়া বাকি উৎপাদকগুলির সমষ্টি দুটি ঘনের অন্তর। যেমন, $1 + 7 + 13 + 19 + 91 + 133 + 247 = 8^3 - 1^3$.

(iii) 1729 কে দুটি ভিন্ন সংখ্যার বর্গের অন্তর হিসাবে চারটি ভিন্নভাবে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$$
\begin{aligned}
1729 &= 865^2 - 864^2 \\
&= 127^2 - 120^2 \\
&= 73^2 - 60^2 \\
&= 55^2 - 36^2.
\end{aligned}
$$

রামানুজনের নোটবইতে দিওফান্তীয় ও অয়লারের সমীকরণের সাংখ্যিক উদাহরণের কথা আমরা আগে উল্লেখ করেছি। এখানে কিছু উল্লেখ করা হল, যা দ্বিতীয় নোটবই -এর 224 এবং 225 পৃষ্ঠায় লিপিবদ্ধ আছে :

$$\left(11\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 39^2; \qquad \left(3\frac{1}{7}\right)^3 - \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \left(5\frac{4}{7}\right)^2;$$

$$\left(3 - \frac{1}{105}\right)^3 + \left(\frac{1}{105}\right)^3 = \left(5\frac{6}{35}\right)^2; \quad \left(3\frac{1}{104}\right)^3 - \left(\frac{1}{104}\right)^3 = \left(5\frac{23}{104}\right)^2$$

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$; $15^3 + 82^3 + 89^3 = 108^3$;

$18^3 + 19^3 + 21^3 = 28^3$; $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$;

$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$; $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$;

$19^3 + 60^3 + 69^3 = 82^3$; $3^3 + 509^3 + 34^6 = 1188^3$;

$3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3$; $1^3 + 135^3 + 138^3 = 172^3$.

রামানুজনের নোটবইতে কেবল ঘন হয়, চতুর্থঘাতে উন্নীত সংখ্যা সমূহের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্কের বর্ণনাও পাওয়া যায়। এখানে তার কিছু উদাহরণও দেওয়া হল :

$$2^4 + 4^4 + 7^4 = 3^4 + 6^4 + 6^4 \quad (= 2673);$$
$$6^4 + 9^4 + 12^4 = 2^4 + 2^4 + 13^4 \quad (= 28593);$$
$$3^4 + 7^4 + 8^4 = 1^4 + 2^4 + 9^4 \quad (= 6579);$$

আবার, $4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4 = 15^4$;

$$1^4 + 8^4 + 12^4 + 32^4 + 64^4$$
$$= 2^4 + 39^4 + 44^4 + 46^4 + 52^4 = 65^4;$$
$$1^4 + 2^4 + 12^4 + 24^4 + 44^4 = 45^4;$$

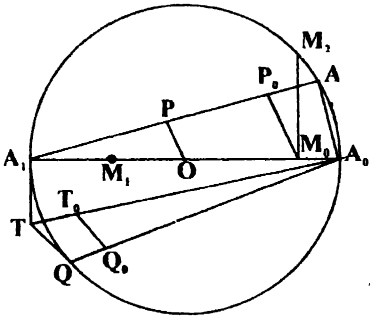
এবং $4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$;

$$5^5 + 10^5 + 11^5 + 16^5 + 19^5 + 29^5 = 30^5.$$

2.1 বৃত্তের সমান করে বর্গক্ষেত্র অঙ্কন

ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে [Vol–5 (1913) P.132] 'Squaring the circle' শিরোনামে রামানুজনের একটি প্রবন্ধ প্রকাশিত হয়। এই প্রবন্ধে তিনি এক দারুণ জ্যামিতিক অঙ্কনের মাধ্যমে $\sqrt{\pi}$ এর আসন্ন মান $\sqrt{\frac{355}{113}}$ হিসাবে নির্ণয় করেছেন। উল্লেখ করা যেতে পারে, 'π' এর আসন্ন মান সূক্ষ্মতরভাবে নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{35102}, \ldots\ldots$ অনুক্রমটি (sequence) কার্যকরী ভূমিকা পালন করে এবং এর চতুর্থ পদটি হল $\frac{355}{113}$।

এর জন্য এখন কিভাবে জ্যামিতিক অঙ্কন করা হবে তার বিবরণ নিচে দেওয়া হল :



একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হল O এবং A_1A_0 হল একটি ব্যাস। OA_0 -এর উপর M_0 এমন একটি বিন্দু যাতে

$$OM_0 = \frac{2}{3} \text{ একক ;}$$

পরিধিস্থ বিন্দু A_2 এমনভাবে অবস্থিত যাতে $A_0A_2 = M_0M_2$ এবং M_0M_2 হল A_1A_0 উপর অঙ্কিত লম্ব যা পরিধিকে M_2 বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A_1A_2 রেখাংশ টানা হল। A_0A_2 রেখাংশের সমান্তরাল করে M_0P_0 এবং OP টানা হল যারা যথাক্রমে A_1A_2কে P_0 এবং P বিন্দুতে ছেদ করে। A_1O রেখাংশের মধ্যবিন্দুকে M_1 দ্বারা চিহ্নিত করা হল।

$$\therefore A_1M_1 = M_1O = \frac{1}{2} \text{ একক।}$$

এখন, A_1 বিন্দুতে স্পর্শক A_1T টানা হল এবং T বিন্দুকে এমনভাবে নেওয়া হল যাতে $A_1T = PP_0$ হয়। এখন পরিধির উপর Q বিন্দু এমনভাবে চিহ্নিত করা হল যাতে

$$A_1P = A_1Q.$$

A_0Q রেখাংশ টানা হল এবং এর উপর Q_0 বিন্দুকে এমনভাবে স্থাপন করা হল যাতে

$$A_0Q_0 = A_0M_1 = \frac{3}{2} \text{ একক।}$$

এখন, TQ এর সমান্তরাল করে Q_0T_0 টানা হল যা A_0T কে T_0 বিন্দুতে ছেদ করে। রামানুজনের দাবি, A_0T_0 বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র বৃত্তটির সমান। অর্থাৎ,

$$A_0T_0^2 = \pi.1^2 \text{ [যেহেতু বৃত্তটি একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট]}$$
$$= \pi$$

অর্থাৎ $$A_0T_0 = \sqrt{\frac{355}{113}}$$

এখন আমরা প্রমাণ করে দেখাব যে,

$$A_0T_0 = \sqrt{\frac{355}{113}}.$$

আমরা পাই,

$$M_0M_2^2 = OM_2^2 - OM_0^2$$ [∵ OM_0M_2 সমকোণী ত্রিভুজের OM_2 অতিভুজ]

$$= 1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$ [∵ ব্যাসার্ধ = 1 একক, এবং $OM_0 = \frac{2}{3}$ একক]

$$= \frac{5}{9}.$$

$$\therefore \quad M_0M_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

এখন, $$A_1A_2^2 = A_1A_0^2 - A_0A_2^2$$ [∵ $\angle A_1A_2A_0$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে সমকোণ]

$$= 2^2 - \frac{5}{9}$$ [∵ ব্যাস $A_1A_0 = 2$ একক এবং $A_0A_2 = M_0M_2$]

$$= 4 - \frac{5}{9} \qquad = \frac{31}{9}$$

$$\therefore \quad A_1A_2 = \frac{\sqrt{31}}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

যেহেতু, $OP \parallel M_0P_0 \parallel A_0A_2$, আমরা পাই

$$\frac{A_1P}{A_1O} = \frac{A_1P_0}{A_1M_0} = \frac{A_1A_2}{A_1A_0}$$

বা, $$\frac{A_1P}{1} = \frac{A_1P_0}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{31}}{3}}{2}$$

$$\therefore \quad A_1P = \frac{\sqrt{31}}{6} = \frac{3\sqrt{31}}{18}$$

এবং $$A_1P_0 = \frac{5\sqrt{31}}{18}.$$

এখন, $$PP_0 = A_1P_0 - A_1P = \frac{5\sqrt{31}}{18} - \frac{3\sqrt{31}}{18} = \frac{\sqrt{31}}{9}$$

তাহলে, $A_0T^2 = A_1T^2 + A_0A_1^2$ [A_1T স্পর্শক বলে $\angle A_0A_1T = 1$ সমকোণ]

$= PP_0^2 + 4$ [$\because A_1T = PP_0$]

$= \frac{31}{81} + 4 = \frac{355}{81}$

আবার, $A_0Q_0^2 = A_0A_1^2 - A_1Q^2$ [$\angle A_1QA_0$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে সমকোণ]

$= 4 - A_1P^2$

$= 4 - \frac{31}{36} = \frac{113}{36}$

$$\therefore \frac{A_0T^2}{A_0Q^2} = \frac{355}{81} \times \frac{36}{113} = \frac{4}{9} \cdot \frac{355}{113}$$

আবার $\frac{A_0T_0}{A_0Q_0} = \frac{A_0T}{A_0Q}$ এবং $A_0Q_0 = A_0M_1 = \frac{3}{2}$ একক

$\therefore$ আমরা পাই,

$$A_0T_0 = A_0Q_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{355}{113}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{355}{113}}$$

$$= \sqrt{\frac{355}{113}}$$

$\therefore$ প্রমাণিত।

2.2 পিথাগোরীয় উপপাদ্য থেকে রামানুজনের অনুসিদ্ধান্ত

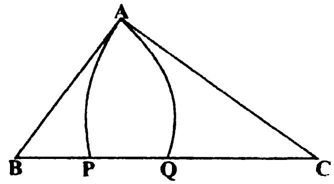
'সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান' — এই পিথাগোরীয় উপপাদ্য থেকে রামানুজন এক সুন্দর অনুসিদ্ধান্তে উপনীত হন এবং মজা হল একে কাজে লাগিয়ে তিনি বীজগাণিতিক অভেদে উপনীত হন। অনুসিদ্ধান্তটি হল :

ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ থেকে BQ এবং CP রেখাংশ

কেটে নেওয়া হল যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে BA এবং CA বাহুদুটির দৈর্ঘ্যের সমান। তাহলে

$$PQ^2 = 2\ BP.QC$$

প্রমাণ :



প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$AB = BQ = BP + PQ$$

$$\therefore\ AB^2 = (BP + PQ)^2$$

$$= BP^2 + PQ^2 + 2\ BP.PQ$$

অনুরূপভাবে,

$$AC^2 = CQ^2 + PQ^2 + 2CQ.PQ$$

$\because$ BC হল সমকোণী ত্রিভুজ ABC -এর অতিভুজ,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$= BP^2 + PQ^2 + 2BP.PQ + CQ^2 + PQ^2 + 2CQ.PQ$$

$$\therefore\ BC^2 = BP^2 + 2PQ^2 + QC^2 + 2BP.PQ + 2PQ.QC \qquad \text{..................(1)}$$

আবার, $BC^2 = (BP + PQ + QC)^2$

$$\therefore\ BC^2 = BP^2 + PQ^2 + QC^2 + 2BP.PQ + 2PQ.QC + 2BP.QC \qquad \text{..................(2)}$$

(1) এবং (2) এর সাহায্যে পাই

$$BP^2 + 2PQ^2 + QC^2 + 2BP.PQ + 2PQ.QC$$

$$= BP^2 + PQ^2 + QC^2 + 2BP.PQ + 2PQ.QC + 2BP.QC$$

অর্থাৎ, $PQ^2 = 2BP.QC$ ....(A)

$\therefore$ প্রমাণিত।

অনুসিদ্ধান্ত :

$AB = a$, $AC = b$ ধরে পাই $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$

এখন, $BQ = a$ এবং $CP = b$

$$PQ = BQ + CP - BC$$

$$= a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BP = BC - CP = \sqrt{a^2 + b^2} - b$$

$$QC = BC - BQ = \sqrt{a^2 + b^2} - a$$

সুতরাং (A) থেকে পাই

$$\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)\cdot\left(\sqrt{a^2 + b^2} - b\right)$$

রামানুজন শুধু এই অভেদটির উল্লেখই করেননি, এই অভেদের সামান্যীকরণ করে তিনি তৃতীয় ঘাতের অভেদে উপনীত হয়েছেন। এটি হল

$$\left(\sqrt[3]{(a+b)^2} - \sqrt[3]{a^2 - ab + b^2}\right)^3 = 3\left(\sqrt[3]{a^3 + b^3} - a\right)\left(\sqrt[3]{a^3 + b^3} - b\right)$$

উপরের অভেদটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষকে আলাদা ভাবে সরল করে দু'পক্ষকে $3\left\{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2} - (a+b)\sqrt[3]{a^3 + b^3} + ab\right\}$ - এর সমান দেখানো যাবে।

3. মৌলিক সংখ্যা

প্রকৃতিতে বাতাসের হিল্লোল, পাখির কলকাকলি, নদীর কলতান, পাহাড়ের ভাবগম্ভীর প্রশান্তি অথবা ঝরনার কুলকুল ধ্বনি যেমন প্রকৃতিপ্রেমিক কবিমনকে আবিষ্ট করে, তেমনি স্বাভাবিক সংখ্যার রাজ্যে অনিয়মিতভাবে ছড়িয়ে থাকা মৌলিক সংখ্যা, তাকে নির্ধারণ করার জন্য সূত্রের সন্ধান অথবা যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা x পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যার মোটসংখ্যা $\pi(x)$-এর জন্য সূত্র-আবিষ্কার তীব্রভাবে গণিতমনকে আকৃষ্ট করে। নানা প্রথিতযশা গণিতজ্ঞদের মত রামানুজনও মৌলিক সংখ্যার চমৎকারিত্বের চমকে বিহ্বল ছিলেন। তাঁর গণিতসাধনার বিরাট অংশ মৌলিক সংখ্যার প্রভাবে প্রভাবিত। অধ্যাপক হার্ডিকে লেখা চিঠি, সেই চিঠির সঙ্গে পাঠানো সব উপপাদ্য, তাঁর নোটবই এবং প্রকাশিত সব প্রবন্ধ থেকে সহজেই এ সিদ্ধান্তে আমরা উপনীত হতে পারি যে, মৌলিক সংখ্যা নিয়ে রামানুজন কেবলমাত্র প্রচুর সময়ই ব্যয় করেন নি, কঠোর পরিশ্রমও করেছেন।

মৌলিক সংখ্যা

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেটে অর্থাৎ 1, 2, 3, 4, 5, ... সংখ্যাদের মধ্যে যে সংখ্যা 1 অপেক্ষা বড় এবং 1 ও সেই সংখ্যা ছাড়া অন্য কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য নয়, তাকে মৌলিক সংখ্যা (prime number) হিসাবে আখ্যায়িত করা হয়। অন্যভাবে বলতে গেলে বলা যায়, স্বাভাবিক সংখ্যার সেটে যে স্বাভাবিক সংখ্যার ঠিক দুটি উৎপাদক আছে তা হল মৌলিক সংখ্যা। আর যে স্বাভাবিক সংখ্যার তিন বা তার বেশি উৎপাদক আছে তা যৌগিক সংখ্যা (composite number) হিসাবে অভিহিত।

মৌলিক সংখ্যা নির্ণয় করার জন্য কোন সাধারণ সূত্র আজ পর্যন্ত আবিষ্কৃত হয় নি, যদিও সে চেষ্টা সেই প্রাচীনকাল থেকে চলে আসছে। তবে আমরা গণিতজ্ঞ ইর‍্যাতোস্থেনেস (Eratosthenes, প্রায় 230 খ্রিঃ পূর্ব) প্রবর্তিত ইর‍্যাতোস্থেনেসের চালুনি (sieve) -এর সাহায্যে ছেঁকে ছেঁকে বেশ কিছু সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা নির্ণয় করতে পারি। 1 থেকে শুরু করে সংখ্যাগুলি বাদ বা কেটে যেতে হবে। 1 কে বাদ দেবার পর আসে 2, যা হল প্রথম মৌলিক সংখ্যা এবং একমাত্র জোড় মৌলিক সংখ্যা। এখন আমরা 2 -এর গুণিতকগুলোকে ছেঁটে ফেলব। তাহলে 2 -এর পর আসবে 3 যা হল মৌলিক সংখ্যা। এবারে 3 -এর গুণিতকগুলি কেটে ফেলা হল। তাহলে বাদ দেবার সংখ্যাদের মধ্যে 3 -এর পর আসবে 5 যা হল মৌলিক। তারপর 5 -এর গুণিতকগুলিকে কেটে ফেলা হবে। পড়ে থাকা সংখ্যার প্রথমে এবারে আসবে 7। এভাবে ইর‍্যাতোস্থেনেসের চালুনির সাহায্যে ছেঁকে ছেঁকে আমরা পড়ে থাকা সংখ্যাগুলিকে মৌলিক সংখ্যা হিসাবে পাবো। নিচে কিছু নমুনা দেওয়া হল।

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	$\boxed{\cancel{49}}$	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	$\boxed{\cancel{77}}$	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
$\boxed{\cancel{91}}$	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1 কে বাদ দিয়ে 2 কে বৃত্তের মধ্যে রেখে 2 -এর গুণিতকদের '/' -চিহ্ন দিয়ে কাটা হল। তারপর পড়ে থাকা সংখ্যার মধ্যে 3 কে বৃত্তের মধ্যে রেখে 3-এর গুণিতকদের '\'-চিহ্ন দিয়ে কাটা হল। পড়ে থাকা সংখ্যার প্রথম 5 কে বৃত্তের মধ্যে রেখে 'X ' দিয়ে 5 -এর গুণিতকগুলোকে কেটে দিতে 7 থাকল। তাকে বৃত্তের মধ্যে রেখে পড়ে থাকা বাকি সংখ্যার মধ্যে 7-এর গুণিতকগুলোকে বাদ দিলে 100 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যাগুলি পড়ে থাকে। তাদের বৃত্তের মধ্যে রাখা হল। উল্লেখ করা যায় যে, 100 -এর চেয়ে ছোট সংখ্যাগুলির মধ্যে 11, 13 ইত্যাদির গুণিতকগুলি আগেই কাটা হয়ে গেছে।

কিন্তু এই ভাবে একটা নির্দিষ্ট সংখ্যা পর্যন্ত আমরা মৌলিক সংখ্যা নির্ধারণ করতে পারি। তাই চলে মৌলিক সংখ্যা নির্ধারণের সাধারণ সূত্রের সন্ধান। কিন্তু তার আবিষ্কার এখনও সম্ভব না হলেও নানা প্রচেষ্টার মাধ্যমে মৌলিক সংখ্যার নানা আকর্ষণীয় দিক উন্মোচিত হয়েছে।

মৌলিক সংখ্যা সংক্রান্ত প্রাচীনতম উপপাদ্যটি ইউক্লিডের (Euclid ,প্রায় 300 খ্রিঃ পূর্ব)। এটি হল :

'মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম।'

তাছাড়া আরো কতগুলি খুব প্রয়োজনীয় উপপাদ্য মৌলিক সংখ্যার নানা ধর্মকে জানতে সাহায্য করে। যেমন :

'1 অপেক্ষা বড়ো যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায় (মৌলিক সংখ্যার ক্ষেত্রে একটি মাত্র উৎপাদক অর্থাৎ সংখ্যাটির উৎপাদক হিসাবে সংখ্যাটিকে পাওয়া যাবে)।'

পাটিগণিতের মূল উপপাদ্য (Fundamental theorem of Arithmetic) বা অনন্য উৎপাদক-বিশ্লেষণী উপপাদ্য (Unique factorization theorem) এ প্রসঙ্গে উল্লেখের দাবি রাখে :

'1 অপেক্ষা বড়ো যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকে অনন্যভাবে বিশ্লেষণ করা যায় (উৎপাদকের ক্রমকে না ধরলে)।'

মৌলিক সংখ্যা আলোচনা প্রসঙ্গে অবশ্যই যে উপপাদ্যের উল্লেখ করতে হয়, তা হল 'মৌলিক সংখ্যা উপপাদ্য' (Prime Number Theorem)।

যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা x পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যার সংখ্যাকে $\pi(x)$ দ্বারা

সূচিত করা হয়, এই $\pi(x)$ -এর সূত্র নির্ধারণ করার জন্য অনেক বিখ্যাত গণিতজ্ঞই সক্রিয় ও সচেষ্ট ছিলেন। লিজেন্দার (Legendre) ও গাউস (Gauss) দুজন স্বাধীনভাবেই নির্ণয় করেন যে, $\pi(x)$ -এর মান $\frac{x}{\log_e x}$ এর প্রায় সমান। তাঁদের এই প্রয়াস থেকেই পাওয়া যায় 'মৌলিক সংখ্যা উপপাদ্য'; অর্থাৎ,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log_e x},$$

যেখানে 'স্পর্শপ্রবণ' (asymptotic to) নির্দেশ করতে '~' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে। আর, দুটি অপেক্ষক ϕ এবং ψ স্পর্শপ্রবণ, $(\phi \sim \psi)$, হবে যদি $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 1$ হয়; অর্থাৎ গাণিতিক চিহ্নের মাধ্যমে আমরা লিখতে পারি

$$\text{as } x \to \infty, \qquad \left[\pi(x) \middle/ \frac{x}{\log_e x} \right] \to 1$$

এই বিখ্যাত উপপাদ্যটি অবশেষে হ্যাদামার্দ (Hadamard) এবং ডি লা ভ্যালি পুসাঁ (de La Valle Pousin) 1896 খ্রিষ্টাব্দে স্বাধীনভাবে প্রমাণ করেন — জটিল বৈশ্লেষিক গণিত (Complex Analysis) -এর শক্তিশালী পদ্ধতির সাহায্যে।

এবারে মৌলিক সংখ্যা সংক্রান্ত রামানুজনের গবেষণার কথা বলা যেতে পারে। তিনি তাঁর নোটবইতে এ সম্বন্ধে নানা তথ্য লিখে রেখে গেছেন। কোনো একটি সংখ্যা পর্যন্ত কতগুলি মৌলিক সংখ্যা আছে, তার বিবরণ অনেক বড়ো সংখ্যা পর্যন্ত তার নোটবই থেকে পাওয়া যায়। এর সাহায্য নিয়ে মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা-তালিকা নিচে দেওয়া হল [বামদিকের স্তম্ভে (A)-তে 1 থেকে উল্লিখিত সংখ্যা পর্যন্ত এবং ডান স্তম্ভে (B)-তে মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা] :

A	B
100	25
200	47
300	62
10^3	168
10^4	1,229
2.10^4	2,262

A	B
10^5	9,562
10^6	78,498
10^7	664,579
10^8	5,761,455

স্বাভাবিক সংখ্যার একটি ধর্ম হল যে, কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n যদি উল্লেখ করা হয়, তবে আমরা পর পর n -সংখ্যক এমন স্বাভাবিক সংখ্যা লিখে যেতে পারি যারা যৌগিক। এর প্রমাণটা খুব মজার বলে এখানে তা দেওয়া হল :

আমরা জানি $(n+1)! = 1.2.3.4..........n.(n+1)$।

তাহলে $(n+1)!$ সংখ্যাটি $2, 3, 4, ..., n, (n+1)$ সংখ্যাগুলির প্রতিটি দিয়ে বিভাজ্য। অতএব m যদি এমন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয় যা $\leq(n+1)$, তাহলে $[(n+1)! + m]$ সংখ্যাটি অবশ্যই m দ্বারা বিভাজ্য। অতএব, পর পর n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, (n+1)! + 4, ..., (n+1)! + (n+1)$ হবে যৌগিক সংখ্যা।

দুটি মৌলিক সংখ্যার মধ্যবর্তী পর পর যৌগিক সংখ্যা আছে, এমন 'দীর্ঘ-পরিসরের যৌগিক সংখ্যা' সম্বন্ধেও রামানুজন আগ্রহী ছিলেন। প্রথম মৌলিক সংখ্যা 2 থেকে শুরু করে আমরা মৌলিক সংখ্যাগুলি পর পর লিখে গেলে, পর পর দুটি মৌলিক সংখ্যার মধ্যে বিভিন্ন সংখ্যক যৌগিক সংখ্যা পাব। যেমন 3 এবং 5 ও 5 এবং 7 এর মধ্যে একটি করে; 7 এবং 11 ও 13 এবং 17 এর মধ্যে তিনটি করে যৌগিক সংখ্যা বর্তমান। এভাবে হিসাব করে আমরা দীর্ঘ পরিসরের যৌগিক সংখ্যার হিসাবে পেতে পারি। রামানুজনের নোটবইতে এ ধরনের দীর্ঘ পরিসরের উল্লেখ আছে। আমরা পর পর এমন পরিসরের উল্লেখ নিচে দিলাম :

3 – 5, 7 – 11, 23 – 29, 89 – 97, 113 – 127, 523 – 541, ... 1337 – 1361, ... 1561919 – 1562051, ... 2010733 – 2010881.

মৌলিক সংখ্যা প্রসঙ্গে আলোচনায় তার আকার সম্বন্ধে জানার আগ্রহ থাকে। রামানুজন মৌলিক সংখ্যার আকার নিয়ে চিন্তা-ভাবনা যে করেছেন, তা তাঁর নোটবই থেকেই প্রমাণিত হয়। মৌলিক সংখ্যাকে (Ax^2+By^2) আকারে প্রকাশ করার কথা তিনি ভেবেছেন। তাঁর নোটবই থেকে আমরা পাই (দ্বিতীয় নোটবই, P 311) :

মৌলিক সংখ্যার আকার	প্রকাশের ধারা
$4n + 1$	$x^2 + y^2$
$8n + 1, 8n + 3$	$x^2 + 2y^2$
$8n + 1, 8n - 1$	$x^2 - 2y^2$
$6n + 1$	$x^2 + 3y^2$
$12n + 1$	$x^2 - 3y^2$
$20n + 1, 20n + 9$	$x^2 + 5y^2$
$10n + 1, 10n + 9$	$x^2 - 5y^2$
$14n + 1, 14n + 9, 14n + 25$	$x^2 + 7y^2$
$28n + 1, 28n + 9, 28n + 25$	$x^2 - 7y^2$

তিনি এও উল্লেখ করেছেন যে, "যদি '$An + B$' আকারের মৌলিক সংখ্যাকে '$ax^2 - by^2$' আকারে প্রকাশ করা যায়, তবে '$An - B$' আকারের মৌলিক সংখ্যাকে '$bx^2 - ay^2$' হিসাবে প্রকাশ করা যাবে"। এ প্রসঙ্গে হার্ডিকে লেখা চিঠিতে তিনি যা লিখেছিলেন তা বলা প্রয়োজন। তিনি লিখেছিলেন, "যতই বড়ো সংখ্যা হোক না কেন, তার চেয়ে ছোটো '$An + B$' আকারের মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা তিনি নির্ণয় করেছেন"। তার মৌলিক সংখ্যা সংক্রান্ত আলোচনা থেকে আমরা জানতে পারি যে,

$(4n+1)$ আকারের মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা = $(6n+1)$ আকারের মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা;

$(4n-1)$ আকারের .... সংখ্যা = $(6n-1)$ আকারের .... সংখ্যা;

$(8n+3)$ আকারের .... সংখ্যা = $(12n+1)$ আকারের ....সংখ্যা;

$(8n+3), (8n+5), (8n+7)$ এবং $(12n+5), (12n+7), (12n+1)$ আকারের সব মৌলিক সংখ্যা সমান সংখ্যক।

তাছাড়া তাঁর নোটবইতে 4 থেকে 1000 পর্যন্ত বিভিন্ন আকারের মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা লিপিবদ্ধ করা আছে :

আকার	সংখ্যা	আকার	সংখ্যা
$4n+1$	80	$6n+1$	80
$4n+3$	86	$6n+5$	86
$8n+1$	36	$12n+1$	36

আকার	সংখ্যা	আকার	সংখ্যা
8n+3	43	12n+5	44
8n+5	43	12n+7	44
8n+7	43	12n+11	44

তাছাড়া নিচের মজার ছকটিও আমাদের নজরে আসে :

$1 + 2 = 3$

$2 + 3 = 5$

$3 + 7 = 2 \times 5$

$1 + 5 = 2 \times 3$

$1 + 2 \times 7 = 3 \times 5$

$3 \times 5 + 7 = 2 \times 11$

$2 + 3 \times 11 = 5 \times 7$

$2 \times 3 \times 7 + 13 = 5 \times 11$

$3 \times 5 \times 11 + 17 = 2 \times 7 \times 13$

$1 + 2 \times 3 \times 7 \times 17 = 5 \times 11 \times 13$

স্বাভাবিকভাবে আমাদের মনে প্রশ্ন আসতে পারে — মৌলিক সংখ্যা নিয়ে রামানুজন এত পরিশ্রম করেছিলেন কেন? $\pi(x)$ -এর জন্য সূত্র উদ্ভাবনে তিনি সফল হবার জন্য এত শ্রম করেছেন বলে আমার ধারণা। এই প্রসঙ্গে 1913 খ্রিষ্টাব্দে 16ই জানুয়ারি অধ্যাপক হার্ডিকে লেখা ঐতিহাসিক চিঠিটির বিশেষ অংশ এবং তার পরবর্তী ব্যাখ্যা বিশেষভাবে লক্ষণীয়। তিনি লিখেছিলেন, "- - - - - - - অতি সম্প্রতি 'Orders of Infinity' শীর্ষক আপনার একটি প্রবন্ধ আমার দৃষ্টি আকর্ষণ করেছে। এই প্রবন্ধের 36 পৃষ্ঠায় আমি এক বিবৃতি দেখলাম যে, প্রদত্ত কোনো সংখ্যা পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যার সংখ্যার জন্য কোনো নির্দিষ্ট প্রকাশনা (definite expression) এখনও পর্যন্ত পাওয়া সম্ভব হয় নি। আমি এমন এক সূত্র পেয়েছি যা প্রকৃত ফলের খুব কাছাকাছি, ভ্রান্তি নগণ্য (negligible)"।

রামানুজনের সূত্রের যে তিনটি বিবরণ হার্ডিকে পাঠানো হয়েছিল তার একটি হল অসীম শ্রেণী। x -এর মান 1000 পর্যন্ত হলে সূত্রটি মিলে যায়। পরবর্তী সময়ে হার্ডি দেখিয়েছিলেন যে x -এর মান আরও বড়ো হলে সূত্রটি 'strikingly close'। প্রথম 90,000,000 সংখ্যা পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা হল 602,489 ; আর রামানুজনের সূত্র অনুসারে পাওয়া সংখ্যার সঙ্গে এর প্রভেদ মাত্র 53।

তবে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, রামানুজন যে সব সূত্রের কথা বলেছেন, তা আগেই গাউস, লিজেন্দার, চেবাইচেফ (Tchebychev), এবং রিম্যান (Reimann) আবিষ্কার করেছিলেন। এগুলির সম্বন্ধে কোনো কিছু না জেনেই রামানুজন এদের পুনরাবিষ্কার করেন। এখানে যেটা বলা দরকার, তা হল যেহেতু জটিল সংখ্যাতত্ত্বে (Complex number theory) তাঁর সম্যক জ্ঞানের অভাব ছিল, তাই মৌলিক সংখ্যা সম্বন্ধে নোটবইতে তাঁর আলোচনা অনেক ক্ষেত্রে অসম্পূর্ণ বা ত্রুটিপূর্ণ ছিল। মৌলিক সংখ্যা সংক্রান্ত এই ত্রুটিপূর্ণ কাজ সম্বন্ধে হার্ডি বলেছেন 'This may be said to have been his one great failure.'। কিন্তু হার্ডির চোখে এই ব্যর্থতা আবার মহিমান্বিত। তিনি ঠিক এর পরেই বলেছেন, 'And yet I am not sure that, in some way, his failure was not more wonderful than any of his triumphs ....'।

মৌলিক সংখ্যা সংক্রান্ত আরো কিছু রামানুজনের কাজের কথা নিচে লেখা হল :

(i) যদি n-তম মৌলিক সংখ্যা p দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে

$$n = \frac{p}{\log p - 1} \quad (\text{প্রায়})$$

(ii) 2, 3, 5, 7, 11 প্রভৃতি মৌলিক সংখ্যার ক্ষেত্রে

$$\frac{2^2+1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2-1}\cdot\frac{5^2+1}{5^2-1}\cdot\frac{7^2+1}{7^2-1}\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2^4+1}{2^4-1}\cdot\frac{3^4+1}{3^4-1}\cdot\frac{5^4+1}{5^4-1}\cdot\frac{7^4+1}{7^4-1}\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{7}{6}$$

$$\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{5^4}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{105}{\pi}$$

উল্লেখ করা যেতে পারে, '691' সংখ্যাটি 'রামানুজন মৌলিক সংখ্যা (Ramanujan prime number)' হিসাবে পরিচিত। এখানে কেন একে এভাবে অভিহিত করা হল, তা না বলে পরে এর ব্যাখ্যা দেওয়া হবে।

4. অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা

রামানুজনের গণিতকর্মের অন্তত কিছুটা সম্বন্ধে যাঁরা জানেন, তাঁদের প্রত্যেকেই অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা (Highly composite number) নিয়ে রামানুজনের বিস্ময়কর অবদানকে স্মরণ করে থাকেন। অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা নিয়ে তাঁর প্রবন্ধ কেমব্রিজে অবস্থান কালের প্রথম বছরে লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির প্রসিডিংসে প্রকাশিত হয়। তখন (1915 খ্রিষ্টাব্দ) রামানুজনকে তাঁর প্রবন্ধটি সংক্ষেপ করতে বলা হয় — সোসাইটির আর্থিক অস্বচ্ছলতার জন্য। মজা হল, প্রবন্ধটি ছোট করলেও তা রামানুজনের প্রকাশিত অন্যান্য প্রবন্ধের মধ্যে দীর্ঘতম (269 টি সমীকরণ সহ 62 পৃষ্ঠার প্রবন্ধ এটি)। অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা সম্বন্ধে রামানুজনের কাজের কিছু প্রাথমিক অংশ (elementary part) এখানে তুলে ধরব।

একটি স্বাভাবিক সংখ্যাকে অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা বলা হয় যদি সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা তার পূর্ববর্তী যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যার উৎপাদকের সংখ্যার চেয়ে বেশী হয়। কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর ভাজকসমূহের সংখ্যা বা উৎপাদকের সংখ্যাকে $d(n)$ দিয়ে চিহ্নিত করলে n একটি অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা হবে, যদি

$$d(m) < d(n),$$

যেখানে m, n এমন দুটি স্বাভাবিক সংখ্যা যেন $m<n$। এখন $d(n)$ এর মাধ্যমে আমরা মৌলিক সংখ্যাকেও সংজ্ঞায়িত করতে পারি। যে স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য $d(n) = 2$, তা মৌলিক সংখ্যা।

2 থেকে শুরু করে 40 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যার n -এর উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট আকার, উৎপাদকের সংখ্যা $d(n)$ এবং সংখ্যাটি মৌলিক (P) বা যৌগিক (C) বা অতিমাত্রিক যৌগিক (HC) কোন্ পর্যায়ভুক্ত সে সম্বন্ধে মন্তব্য নিচে দেওয়া হল। এক্ষেত্রে অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা সম্বন্ধে অন্তত একটা আবছা ধারণা পাওয়া যেতে পারে।

n	d(n)	মন্তব্য
$2 = 2^1$	2	P, HC
$3 = 3^1$	2	P
$4 = 2^2$	3	HC
$5 = 5^1$	2	P
$6 = 2^1.3^1$	4	HC

অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা

n	d(n)	মন্তব্য
$7 = 7^1$	2	P
$8 = 2^3$	4	C
$9 = 3^2$	3	C
$10 = 2^1.5^1$	4	C
$11 = 11^1$	2	P
$12 = 2^2.3^1$	6	HC
$13 = 13^1$	2	P
$14 = 2^1.7^1$	4	C
$15 = 3^1.5^1$	4	C
$16 = 2^4$	5	C
$17 = 17^1$	2	P
$18 = 2.3^2$	6	C
$19 = 19^1$	2	P
$20 = 2^2.5^1$	6	C
$21 = 3^1.7^1$	4	C
$22 = 2^1.11^1$	4	C
$23 = 23^1$	2	P
$24 = 2^3.3^1$	8	HC
$25 = 5^2$	3	C
$26 = 2^1.13^1$	4	C
$27 = 3^3$	4	C
$28 = 2^2.7^1$	6	C
$29 = 29^1$	2	P
$30 = 2^1.3^1.5^1$	8	C
$31 = 31^1$	2	P
$32 = 2^5$	6	C
$33 = 3^1.11^1$	4	C
$34 = 2^1.17^1$	4	C

n	d(n)	মন্তব্য
$35 = 5^1.7^1$	4	C
$36 = 2^2.3^2$	9	HC
$37 = 37^1$	2	P
$38 = 2^1.19^1$	4	C
$39 = 3^1.13^1$	4	C
$40 = 2^3.5$	8	C

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেটে 1 সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা 1 এবং এটি মৌলিক সংখ্যা অথবা যৌগিক সংখ্যা কোনোটিই নয়। পাটিগণিতের মূল উপপাদ্য অনুসারে আমাদের জানা আছে — 1 অপেক্ষা বড়ো যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাকে সূচক সম্বলিত মৌলিক সংখ্যার উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যাবে এবং এই উৎপাদকে বিশ্লেষিত হওয়াটা অনন্য (উৎপাদকের ক্রমকে বাদ দিয়ে)। অর্থাৎ, 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যাকে আমরা লিখতে পারব

$$n = p_1^{n_1}\, p_2^{n_2}\, p_3^{n_3} \cdots\cdots\cdots p_m^{n_m}$$ এই আকারে ....(1)

এক্ষেত্রে $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_m$ ভিন্ন ভিন্ন মৌলিক সংখ্যা এবং $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots n_m$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। রামানুজন প্রমাণ করেন যে, n অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা হলে $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots$ যথাক্রমে পর পর মৌলিক সংখ্যা 2, 3, 5, 7, ... হবে আর $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \ldots\ldots$। তিনি এও দেখিয়েছেন যে n_m শেষ সূচক হলে, 4 এবং 36 এই দুটি অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যার ক্ষেত্র ছাড়া $n_m = 1$ হবে। অর্থাৎ, n অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা হলে

$$n = 2^{n_1}\, 3^{n_2}\, 5^{n_3}\, 7^{n_4}\, 11^{n_5} \cdots\cdots$$ হবে,

যেখানে $n_m \geq n_{m+1}$, m একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

তাছাড়া রামানুজন (1)-এ বর্ণিত n-এর উৎপাদকের সংখ্যা d(n) সম্বন্ধে বলেছেন $d(n) = (1+n_1)(1+n_2)(1+n_3) \ldots\ldots (1+n_m)$। উপরের ছক থেকে এটা আমরা সহজেই যাচাই করে নিতে পারি।

রামানুজন তাঁর নোটবইতে শতাধিক অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যার উল্লেখ করে গেছেন। এদের মধ্যে প্রথম দশটি হল 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180। তিনি 103 –তম অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যাটির উৎপাদকে বিশ্লেষণ, তার d(n)

এবং $d(d(n))$-এর সম্বন্ধেও লিখে গেছেন।

103-তম অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা

$$= 6{,}746{,}328{,}388{,}800$$
$$= 2^6 3^4.5^2.7^2.11.13.17.19.23$$

এক্ষেত্রে $d(n) = 10080$
$$= 2^5.3^2.5.7$$

এবং $d(d(n)) = 72 = 2^3.3^2$

রামানুজন অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যার যে সব ধর্মের কথা বলেছেন, তার মধ্যে দু'একটি নিচে উল্লেখ করা হল :

(i) দুটি পর পর অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা স্পর্শপ্রবণভাবে সমতুল্য (asymptotically equivalent); অর্থাৎ x এবং y পর পর দুটি অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা হলে $x \sim y$, অর্থাৎ $\frac{x}{y} \to 1$।

(ii) x অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যার সংখ্যা $\log x$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

(iii) যদি p -এর পরিপ্রেক্ষিতে q যথেষ্ট ছোটো (sufficiently small) হয়, তবে

$$n_1 \log 2 \sim n_2 \log 3 \sim n_3 \log 5 \sim \cdots\cdots\cdots \sim n_q \log q \sim \log p / \log 2$$

রামানুজন ও হার্ডি প্রমাণ করেন যে, x -এর ছোট অতিমাত্রিক যৌগিকসংখ্যার সংখ্যাকে $N(x)$ দিয়ে চিহ্নিত করলে,

$$N(x) \sim \exp\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\log x}{\log\ \log x}}\ (1+\epsilon) \quad \text{হবে,}$$

যেখানে x খুব বড় স্বাভাবিক সংখ্যা এবং ϵ খুব ছোটো ধনাত্মক সংখ্যা।

উল্লেখ করা যেতে পারে যে, রামানুজনের আলোচিত অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যার ধর্মাবলী পরবর্তী সময়ে বিভাজন তত্ত্ব (theory of partition) এবং $d(n)$ -এর মান নির্ণয় বিষয়ে প্রয়োগ করা হয়েছে এবং এর গুরুত্বও উপলব্ধি করা গেছে।

এ প্রসঙ্গে বলতে হয় যে, রামানুজন আবার অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যার সেট

থেকে বিশেষ একটি সেট নির্বাচন করে নাম দিয়েছেন 'অগ্রণী অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা' (Superior highly composite numbers)। এদের ধর্মাবলীও তিনি আলোচনা করেছেন এবং d(n)-এর সঙ্গে এর সম্পর্ক নির্ধারণে ব্রতী হয়েছেন। এই দলভুক্ত সংখ্যার প্রথম কয়েকটির উল্লেখ করা হল : .

2, 6. 12, 60. 120, 360, 2520, 5040, 554400, 720720.

5. প্রাথমিক গণিতে রামানুজনের প্রতিভার স্ফুরণ — সাধারণ থেকে অসাধারণ

[A] রামানুজনের ব্যাক্তিগত সান্নিধ্যে বা তাঁর জীবন বা গণিতসাধনার সংস্পর্শে যাঁরা এসেছেন, তাঁদের প্রত্যেকেই রামানুজনের প্রতিভার অসাধারণতায় বিস্ময়াভিভূত হয়েছেন। এর কারণ কী অথবা কেন তাঁকে সবাই 'mathematical genius' আখ্যায় অভিহিত করেন, তার ব্যাখ্যা বহু ভাবেই দেওয়া হয়ে থাকে। আমি এর সপক্ষে বলার জন্য এখানে একটি অতি পরিচিত সংখ্যা অনুক্রমের উল্লেখ করবো। এর সঙ্গে অনেক গণিতজ্ঞই দীর্ঘদিন ধরে পরিচিত, কিন্তু এর কার্যকারিতা রামানুজনের আগে কেই অনুধাবন করতে পারেন নি। এই সাধারণ অনুক্রমটিকে কাজে লাগিয়ে তিনি যে অসাধারণ এক সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সমর্থ হয়েছিলেন তা সত্যিই বিস্ময়কর। তাই তো তিনি অনন্যসাধারণ প্রতিভার অধিকারী। উপরে উল্লিখিত অতি পরিচিত অনুক্রমটি হল ফিবোনাচ্চি সংখ্যা (Fibonacci numbers) যার পদগুলো হল

1, 1, 2, 3, 5, 8. 13. 21. 34. 55, ...

লক্ষণীয়, তৃতীয় পদ বা তার পরের যে কোনো পদ ঠিক আগের দুটি পদ যোগ করে পাওয়া যায় এবং প্রথম পদ ও দ্বিতীয় পদের প্রতিটি হচ্ছে 1। অর্থাৎ, এই অনুক্রমকে $\{x_n\}_n$ দ্বারা চিহ্নিত করলে আমরা পাই $x_1 = x_2 = 1$ এবং $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, যখন $n \geq 3$.

এটা সকলেরই জানা ছিল যে, এর পর পর দুটি পদের অনুপাতগুলি নিয়ে যদি এক নূতন অনুক্রম $\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}_n$ গঠন করা হয়, তবে অনুক্রমটির পদগুলি হবে

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \quad . \quad . \quad . \qquad .$$

এবং এই অনুক্রমটি একটি অভিসারী অনুক্রম (convergent sequence)। এর সীমা (limit) $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ যা $1 = x + x^2$ দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ (root)।

রামানুজনের মাথায় এক বিস্ময়কর চিন্তার উদয় হয়। তিনি সমস্ত পদ্ধতিকে উল্টোদিক দিয়ে চিন্তা করলেন। তার মনে প্রশ্ন জাগল

$$1 = a_1x + a_2x^2$$

একটি দ্বিঘাত সমীকরণ আর একটি অনুক্রম $\{x_n\}_n : x_1 = 1, x_2 = a_1$ এবং $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$, যখন $x \geq 3$, দেয়া থাকলে $\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}_n$ অনুক্রমটি অভিসারী হবে কিনা? আর এই অনুক্রমের সীমা

$$1 = a_1x + a_2x^2$$

সমীকরণের একটি বীজ হবে কি?

রামানুজন দেখালেন যে, উপরের প্রশ্নের উত্তর হল, হ্যাঁ ; এবং এর ফলে তিনি মূলদ সংখ্যার সাহায্যে অমূলদ সংখ্যার আসন্নীকরণের এক সুন্দর পদ্ধতি আবিষ্কার করেন। তিনি শুধু এখানেই থামলেন না, উপরে বর্ণিত উপপাদ্যের সামান্যীকরণও করলেন। তিনি দেখালেন,

$$‘\ 1 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\cdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

আকারের সমীকরণ দেয়া থাকলে আর $\{x_n\}_n$ অণুক্রমটি $x_1 = 1,\ x_2 = a_1,\ x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}x_1$, যখন $x \geq 3$, সংজ্ঞায়িত হলে $\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}_n$ অনুক্রমটি x এ'ই অভিসারী হবে।’

তিনি এই উপপাদ্য ব্যবহার করে ‘$\log_e 2$’ এই অমূলদ সংখ্যার আসন্নমান মূলদ সংখ্যার সাহায্যে নির্ণয় করতে সমর্থ হন। দেখা যাক কী ভাবে?

ধরি, $\log_e 2 = x$,

তাহলে আমরা পাব

$$e^x = 2$$

বা, $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots\cdots = 2$

বা, $1 = x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots\cdots \qquad \ldots\ldots(2)$

এখন, (1) এবং (2) তুলনা করে পাই

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{1}{24},\ a_5 = \frac{1}{120},\ \ldots\ldots\ldots$$

তাহলে $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটির পদগুলি হবে

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = a_1 = 1$$

$$x_3 = a_1x_2 + a_2x_1 = 1.1 + \frac{1}{2}.1 = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a_1x_3 + a_2x_2 + a_3x_1 = 1\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot1 = \frac{13}{6}$$

$$x_5 = a_1x_4 + a_2x_3 + a_3x_2 + a_4x_1$$

$$= 1\cdot\frac{13}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{24}\cdot1 = \frac{25}{8}$$

এমনি ভাবে $x_6 = \frac{541}{120}$, ইত্যাদি।

সুতরাং $\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}_n$ অনুক্রমটির পদগুলি হল

$$1,\ \frac{1}{3/2},\ \frac{3/2}{13/6},\ \frac{13/6}{25/8},\ \frac{25/8}{541/120},\ \ldots\ldots\ldots$$

অর্থাৎ $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{9}{13},\ \frac{52}{75},\ \frac{375}{541},\ \ldots\ldots\ldots$

এখন দাবি হল, 'এই মূলদ সংখ্যার অনুক্রমটির সীমা $\log_e 2$, যখন n অসীমের দিকে চালিত $(n \to \infty)$'।

এখন, $\frac{375}{541} = 0{\cdot}6931608$

আর $\log_e 2 = 0{\cdot}693160826$ ....

সত্যি কি বিস্ময়কর অন্তর্দৃষ্টি! সাধারণ পরিস্থিতিকে কাজে লাগিয়ে রামানুজন এমনি বহু সুদূরপ্রসারী কৃতিত্বের ছাপ রেখে গেছেন তাঁর কাজের মধ্যে।

[B] রামানুজনের elementary mathematics বা সাধারণ গণিতের মধ্যে যে কি অভিনবত্ব লুকিয়ে আছে, তা একটু গভীর ভাবে লক্ষ করলে আমাদের চোখে ভেসে ওঠে। এখানে ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত 289 নম্বর প্রশ্নটি এবং এর উত্তর যা রামানুজন দিয়েছিলেন তা উল্লেখ করব। রামানুজনের লেখা উত্তরটি পরবর্তীকালে একই জার্নালে প্রকাশিত হয়। প্রশ্নটি হল :

মান নির্ণয় কর :

(i) $$\sqrt{\left(1+2\sqrt{\left(1+3\sqrt{\left(1+4\sqrt{(1+\cdots\cdots)}\cdots\cdots\right)}\cdots\cdots\right)}\cdots\cdots\right)}$$

(ii) $$\sqrt{\left(6+2\sqrt{\left(7+3\sqrt{(8+\cdots\cdots)}\cdots\cdots\right)}\cdots\cdots\right)}$$

রামানুজনের দেওয়া সমাধান :

(i) আমরা পাই, $n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$

ধরি, $f(n) = n(n+2)$

তাহলে, $f(n) = n\sqrt{(1+f(n+1))}$

$$= n\sqrt{\left(1+(n+1)\sqrt{(1+f(n+2))}\right)}$$

$$= n\sqrt{\left(1+(n+1)\sqrt{\left(1+(n+2)\sqrt{\left(1+(n+3)\sqrt{(1+\cdots)}\right)}\right)}\right)}$$

এখন $n=1$ বসিয়ে পাই

$$3 = 1\sqrt{\left(1+2\sqrt{\left(1+3\sqrt{\left(1+4\sqrt{(1+\cdots)}\cdots\right)}\cdots\right)}\cdots\right)}$$

(ii) অনুরূপ ভাবে

$n(n+3) = n\sqrt{(n+5)+(n+1)(n+4)}$

ধরি, $f(n) = n(n+3)$

তাহলে, $f(n) = n\sqrt{((n+5)+f(n+1))}$

$$= n\sqrt{((n+5)+(n+1)\sqrt{((n+6)+f(n+2))})}$$

$$= n\sqrt{\left((n+5)+(n+1)\sqrt{((n+6)+(n+2)\sqrt{((n+7)+\cdots)\cdots})}\right)}$$

এখন $n = 1$ বসিয়ে পাই

$$4 = \sqrt{\left(6+2\sqrt{(7+3\sqrt{(8+\cdots)\cdots})}\right)}$$

যা লক্ষণীয়, তা হল এই দুটি গাণিতিক ফল রামানুজনের অসাধারণ গাণিতিক মনের নজর এড়াতে পারে নি। বিশেষ থেকে সামান্যীকরণ বা সাধারণ থেকে অসাধারণে যাত্রার প্রতিভা যে রামানুজনের সহজাত — তা আমরা নিজের সামান্যীকরণ থেকে বুঝতে পারি। তিনি তাঁর নোটবইতে লিখেছেন

$$x+n+a = \sqrt{\left(ax+(n+a)^2+x\sqrt{\left(a(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\sqrt{a(x+2n)+(n+a)^2+(x+2n)\sqrt{a(x+3n)+(n+a)^2+\cdots}}\right)}\right)} \quad \ldots\ldots (1)$$

লক্ষণীয়, (1) -এ $x = 2, n = 1$ এবং $a = 0$ বসালে আমরা পাই (i) সম্পর্কটি আর (1) -এ $x = 2, n = 1$ এবং $a = 1$ বসালে (ii) সম্পর্কটি।

তীক্ষ্ণ পর্যবেক্ষণ ক্ষমতার ফলে রামানুজন কী ভাবে (1) নং সম্পর্কে উপনীত হন, তা নিচের দুটি উদাহরণ দেখলে বোঝা যাবে :

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2\ 4}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+24}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+35}}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\ 7}}}}$$

....

$$= \sqrt{\left(1+2\sqrt{\left(1+3\sqrt{\left(1+4\sqrt{\left(1+5\sqrt{(1+\cdots)\cdots}\right)}\right)}\right)}\right)}$$

এবং
$$4 = \sqrt{16} = \sqrt{6+10} = \sqrt{6+2\ 5} = \sqrt{6+2\sqrt{25}}$$

$$= \sqrt{6+2\sqrt{7+18}} = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\cdot 6}} = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{36}}}$$

$$= \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+28}}} = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\cdot 7}}}$$

....

$$= \sqrt{\left(6+2\sqrt{\left(7+3\sqrt{\left(8+4\sqrt{\left(9+5\sqrt{10+\cdots}\right)\cdots}\right)}\right)}\right)}$$

উল্লেখ করা যেতে পারে, রামানুজন শুধু ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে প্রকাশিত প্রশ্নের সমাধানই করেন নি, তিনি তাতে অনেক সুন্দর সুন্দর নতুন প্রশ্নও পাঠিয়েছিলেন। তাঁর পাঠানো একটি প্রশ্ন নিচে দেওয়া হল :

$$(a+b+1)\left(\frac{a}{b}\right)^2 + (a+b+3)\left(\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\right)^2 + (a+b+5)\left(\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\right)^2 +$$

.........................n পদ পর্যন্ত — এই শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

উল্লেখ করা যেতে পারে, এ সমস্যার সমাধান কে আর রামা আয়ার (K.R.Rama Aiyar) এবং কে আপ্পুকুট্টন ইরাডে (K. Appukuttan Erady) করেছিলেন যা ঐ জার্নালে পরবর্তী সময়ে প্রকাশিত হয়। এর সমাধানের জন্য দুটি অনুক্রম $\{u_n\}_n$ ও $\{v_n\}_n$ -এর প্রয়োজন, যেখানে, u_n ও v_n হল

$$u_n = \left[\frac{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n-1)}\right]^2$$

এবং $\quad v_n = (a+b+2n-1).u_n$

তাহলে $\quad (b-a-1)v_n = (a+n-1)^2u_{n-1}-(a+n)^2u_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$

এ বারে (II) -এ n = 2, 3, ..., n বসিয়ে এবং সরল করে পাই

$$v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n = \frac{(a+1)^2 u_1 - (a+1)^2 u_n}{(b-a-1)},$$

এ বারে ডানপক্ষে u_1 এবং u_n এর মান বসিয়ে এবং কিছুটা সরল করে পাই

$$v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n = \frac{a^2-(a+1)^2}{b-a-1}, \left[b\neq(a+1)\right],$$

যা প্রদত্ত শ্রেণীটির সমষ্টি।

[C] এবারে সমীকরণ সমাধানের একটি উদাহরণ :

$$x^2 + 7 = 2^n.$$

রামানুজন বলেন

$x = 1, \quad n = 3; \qquad x = 3, \ n = 4; \ x = 5, n = 5;$

$x = 11, \ n = 7; \qquad x = 181, n = 15$

হল সমীকরণটির কেবলমাত্র ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সমাধান। কিন্তু রামানুজন যে কি করে এ সিদ্ধান্তে উপনীত হলেন, তার কোন উল্লেখ করেন নি। 1948 সালে টি নাগেল (T. Nagell) এর প্রমাণ করেন।

অন্তত এই একটি সমীকরণ নিয়েই ব্রুস বার্নেটের সুরে সুর মিলিয়ে বলা যায়, 'Not only are such results fascinating, but for the most part, Ramanujan's method remains a mystry.'

6. ক্রমিক ভগ্নাংশ

ক্রমিক ভগ্নাংশের উপর রামানুজনের গাণিতিক কাজকর্মের আলোচনার আগে ক্রমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে কিছু প্রাথমিক কথা বলা দরকার।

যদি $a_1, a_2, a_3, a_4,$ .... এবং $b_2, b_3, b_4,$ .... ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় (a_1 শূন্যও হতে পারে), তবে

$$a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\cdots}}}$$

আকারের প্রকাশনাকে ক্রমিক ভগ্নাংশ (continued fraction) বলা হয়। এই প্রকাশনাকে নিচের মত করে সংক্ষিপ্ত আকারেও লেখা যেতে পারে :

$$a_1+\frac{b_2}{a_2+}\;\frac{b_3}{a_3+}\;\frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots\;\frac{b_n}{a_n+}\cdots\cdots\quad\cdots.$$

যদি $b_2 = b_3 = b_4 =$ .... $= 1$ হয়, তবে ক্রমিক ভগ্নাংশটিকে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ (simple continued fraction) বলা হয়। আর a_1, $\frac{b_2}{a_2}$, $\frac{b_3}{a_3}$, $\frac{b_4}{a_4}$,........ রাশিগুলিকে যথাক্রমে ক্রমিক ভগ্নাংশের প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, ... ভাগফল (quotient) বলা হয়। একটি ক্রমিক ভগ্নাংশের প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... ভাগফলে থেমে গিয়ে যে ভগ্নাংশগুলি পাওয়া যায় তাদের যথাক্রমে ক্রমিক ভগ্নাংশের প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... অভিসারী (convergent) বলা হয়। ক্রমিক ভগ্নাংশের অনেক সুন্দর ধর্ম আছে।

রামানুজন শুধুমাত্র ক্রমিক ভগ্নাংশের সৌন্দর্যেই আকৃষ্ট হন নি, এই শাখার উপর তাঁর অসাধারণ দখল দেখিয়েছেন। নিচের ঘটনার বর্ণনা থেকে রামানুজন যে কী ভাবে ক্রমিক ভগ্নাংশকে আত্মস্থ করেছিলেন, তা সহজেই বোঝা যাবে।

রামানুজন যখন ইংল্যান্ডে ছিলেন, তখন প্রশান্ত মহলানবিশ গেছেন ইংল্যান্ডে পড়াশুনো করতে। দু'জনের মধ্যে বেশ বন্ধুত্ব গড়ে ওঠে। একদিন রামানুজন মহলানবিশকে লাঞ্চে ডেকেছেন। তিনি আসার সময় একটি পত্রিকা রাস্তা থেকে

কিনে নিয়ে এসেছেন। এই মাসিক পত্রিকায় নানা ধাঁধা ছিল। তিনি এসে দেখলেন রামানুজন রান্নায় ব্যস্ত। আর রাস্তায় আসার সময় পত্রিকায় প্রকাশিত একটি ধাঁধা তিনি মনে মনে কয়েক বারের চেষ্টায় সমাধান করে ফেলেছেন। তিনি এসে রামানুজনকে বললেন, তাঁর জন্য একটি গাণিতিক সমস্যা আছে। রামানুজন রান্না করতে করতে বললেন, 'তাহলে বলে ফেলো'। ধাঁধাটি হল ব্রিটিশ সৈন্যবাহিনীর অফিসারদের বাড়ির নম্বর সংক্রান্ত। ধাঁধাটিকে গাণিতিক সমস্যা হিসাবে লিখলে হবে, 'দুটি বাড়ির নম্বর m এবং n (যা স্বাভাবিক সংখ্যা) নির্ণয় কর যাতে $m^2 - 10n^2 = \pm 1$ সম্পর্কটি সিদ্ধ হয়'। প্রশ্ন শেষ হবার প্রায় সঙ্গে সঙ্গে রামানুজন সমাধান লিখে নিতে বলে একটি ক্রমিক ভগ্নাশের উল্লেখ করলেন, যা হল

$$3 + \frac{1}{6+}\;\frac{1}{6+}\;\frac{1}{6+}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

এই ক্রমিক ভগ্নাংশ থেকে অসংখ্য সমাধান পাওয়া যাবে, যার প্রথমটি হল প্রশান্ত মহলানবিশের করা সমাধান। ধাঁধাটির সমাধান হচ্ছে এই ক্রমিক ভগ্নাংশটির পর পর অভিসারী সমূহ। প্রথমটা হচ্ছে অর্থাৎ $m = 3,\ n = 1$; দ্বিতীয় হচ্ছে অর্থাৎ $m = 19,\ n = 6$; তৃতীয়টি হবে

$$\left(3+\frac{1}{6+\frac{1}{6}} = 3+\frac{6}{37}=\frac{117}{37}\right)$$

অর্থাৎ $m = 117,\ n = 37$; হিসাব করে নিলে দেখা যাবে এর চতুর্থ সমাধানে $m = 721,\ n = 228$; পঞ্চমটির ক্ষেত্রে $m = 4443,\ n = 1405$। এমনি করে আমরা এর থেকে অসংখ্য সমাধান পাব।

সমাধানের উত্তরে ক্রমিক ভগ্নাংশের উল্লেখ শুনে মহলানবিশ তো স্তম্ভিত। কৌতূহলী হয়ে তিনি রামানুজনকে জিজ্ঞেস করলেন কী ভাবে রামানুজন এর সমাধান করলেন। উত্তরে বললেন, 'সমস্যাটা শোনার সঙ্গে এটা স্পষ্ট হয়ে উঠল যে এর সমাধান অবশ্যই একটি ক্রমিক ভগ্নাংশ হবে ; তারপর চিন্তা করলাম, কোন্ ক্রমিক ভগ্নাংশ? উত্তরটা মনে এসে গেল।'

এইখানেই রামানুজনের অনন্যসাধারণতা, তাঁর গণিতমেধার গণিত জগতে অপূর্ব ও সাবলীল বিচরণ ক্ষমতার স্বতন্ত্রতা!

ক্রমিক ভগ্নাংশের উপর রামানুজনের গবেষণা একটি বিশেষ ক্রমিক ভগ্নাংশের সামান্যীকরণকে নিয়ে গড়ে উঠেছে। এটিকে ‘রামানুজনের ক্রমিক ভগ্নাংশ’ বলা হয়। এটি হল

$$\frac{1}{1+}\,\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+\ldots\ldots}, \qquad |x|<1$$

উল্লেখ করা যেতে পারে, হার্ডিকে লেখা রামানুজনের ঐতিহাসিক চিঠির সঙ্গে যে সব সূত্র বা ফল (120টি) তিনি পাঠিয়েছিলেন, তার মধ্যে হার্ডি 15টিকে নির্বাচন করেছিলেন ‘fairly representative’ হিসাবে। এদের মধ্যে ক্রমিক ভগ্নাংশ সংক্রান্ত তিনটি সূত্র নিচে দেওয়া হল (হার্ডির দেওয়া নম্বর অবিকৃত রেখে) :

(1.10) যদি $u = \frac{x}{1+}\,\frac{x^5}{1+}\,\frac{x^{10}}{1+}\,\frac{x^{15}}{1+\ldots\ldots}$ এবং

$v = \frac{x^{1/5}}{1+}\,\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+\ldots\ldots}$ হয়,

তবে $v^5 = u\cdot\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}$

(1.11) $$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi}}{1+\ldots} = \left\{\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right\}e^{\frac{2\pi}{5}}$$

(1.12) $$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{\left\{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^{5/2}-1\right\}}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}$$

এই ক্রমিক ভগ্নাংশগুলি সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে হার্ডি বলেছিলেন, ‘(1.10) (1.12) defeated me completely ; I had never seen anything in the least like them before'। সত্যিই তো এগুলি 'on a different level and obviously both difficult and deep'।

তাছাড়া সমাকলনকে (Integral) ক্রমিক ভগ্নাংশের মাধ্যমে প্রকাশ করেছেন রামানুজন। হার্ডিকে পাঠানো ও হার্ডির দ্বারা নির্বাচিত এমন দুটি হল :

$$(1.18)\quad \int_0^a e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\Pi}}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{2}{2a+}\ \frac{3}{a+}\ \frac{4}{2a+\cdots}$$

$$(1.19)\quad 4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}dx = \frac{1}{1+}\ \frac{1^2}{1+}\ \frac{2^2}{1+}\ \frac{2^2}{1+}\ \frac{3^2}{1+}\ \frac{3^2}{1+\cdots}$$

এ প্রসঙ্গে আর একটি উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে, যা হল

$$\frac{4}{x+}\ \frac{1^2}{2x+}\ \frac{3^2}{2x+}\ \frac{5^2}{2x+}\ \frac{7^2}{2x+\cdots} = \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+3}{4}\right)}\right\}^2$$

ক্রমিক ভগ্নাংশের উপর রামানুজনের গবেষণা দারুণ প্রশংসিত। তিনি তাঁর দ্বিতীয় নোটবইতে ক্রমিক ভগ্নাংশ সম্পর্কিত একটি সুন্দর অভেদের উল্লেখ করেছেন। অভেদটি এই রকম

$$1 + \frac{aq}{1+}\ \frac{aq^2}{1+}\ \frac{aq^3}{1+\cdots\cdots}\ \frac{aq^n}{1} = \frac{A_n}{B_n},$$

যেখানে, $A_n = 1 + aq\dfrac{1-q^n}{1-q} + \dfrac{a^2q^4(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)} +$

এবং $B_n = 1 + aq^2\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} + \dfrac{a^2q^6(1-q^{n-2})(1-q^{n-3})}{(1-q)(1-q^2)} + \cdots$

যেখানে $|q|<1$

তাছাড়া ক্রমিক ভগ্নাংশের উপর রামানুজনের উদ্ভাবিত আরও একটি অভেদ হল :

$$2x^2\left\{\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}+\cdots\right\}$$

$$=\quad \frac{1}{x+}\ \frac{1^2}{x+}\ \frac{1.2}{x+}\ \frac{2.3}{x+}\ \frac{3^2}{x+}\cdots$$

7. বিভাজন তত্ত্ব

বিংশ শতাব্দীর গণিত শাস্ত্রে যুগ্মভাবে রামানুজন ও হার্ডির দ্বারা সৃষ্ট স্পর্শপ্রবণ বিভাজন তত্ত্ব (Asymptotic theory of partition) এক মহত্তম গাণিতিক উদ্ভাবন হিসাবে চিহ্নিত। কোন স্বাভাবিক সংখ্যাকে এক বা একাধিক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল হিসাবে যত রকম ভাবে প্রকাশ করা যায়, তাকে সেই সংখ্যার বিভাজন সংখ্যা (number of partition) বলা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যাটা যদি n হয়, তবে তার বিভাজন সংখ্যাকে আমরা p(n) দিয়ে চিহ্নিত করি। রামানুজনই প্রথম p(n) -এর congruence property বা বিভাজ্যতার ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করেন।

নিচের ব্যাখ্যা থেকে আমরা p(n) সম্বন্ধে কিছু ধারণা সহজেই করতে পারি। আমরা পাই

$$\begin{aligned}
1 &= 1 && \therefore\ p(1) = 1\\[6pt]
2 &= 2 &&\\
&= 1+1 && \therefore\ p(2) = 2\\[6pt]
3 &= 3 &&\\
&= 2+1 &&\\
&= 1+1+1 && \therefore\ p(3) = 3\\[6pt]
4 &= 4 &&\\
&= 3+1 &&\\
&= 2+2 &&\\
&= 2+1+1 &&\\
&= 1+1+1+1 && \therefore\ p(4) = 5
\end{aligned}$$

$$5 = 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1 \qquad \therefore p(5) = 7$$

ইত্যাদি।

মনে হতে পারে, আমরা এ ভাবে যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য p(n) সহজেই বার করতে পারব। কিন্তু n বড় হলে p(n) -এর মান নির্ণয় করা অত্যন্ত শ্রমসাধ্য। কারণ, n সাপেক্ষে p(n) অতি দ্রুত বৃদ্ধি পায় [p(n) increases rapidly with n] n -এর বিভিন্ন মানের জন্য p(n) -এর মান কিভাবে পরিবর্তিত হয় তা নিচের তালিকা থেকে দেখা যেতে পারে।

$$\begin{aligned} p(6) &= 11 \\ p(7) &= 15 \\ p(10) &= 42 \\ p(20) &= 627 \\ p(50) &= 204{,}226 \\ p(80) &= 15{,}796{,}476 \\ p(150) &= 40{,}853{,}233{,}313 \end{aligned}$$ ইত্যাদি।

তাই প্রশ্ন হল, p(n) নির্ধারণ করার জন্য কি কোনো সূত্রের উদ্ভাবন সম্ভব? এই প্রশ্নের উত্তর পেতে রামানুজন ও হার্ডি বিশেষ যত্নবান হন। তাঁরা উপবৃত্তীয় মডিউলার অপেক্ষক (elliptic modular function) এবং বৃত্তীয় পদ্ধতি (circular method) নামে অভিহিত এক নূতন পদ্ধতির সাহায্য নিয়ে p(n)-এর জন্য এক সূত্র (formula) উদ্ভাবন করেন, যা থেকে p(n) এর প্রায় সঠিক মান স্থির করা যেতে পারে। তাঁরা প্রমাণ করেন যে, log p(n) প্রায় '$c\sqrt{n}$' -এর সমান, যেখানে c একটি ধ্রুবক।

পরে 1942 খ্রিষ্টাব্দে প্রমাণিত হয় যে, p(n) প্রায় $\frac{a}{n}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right)$, (a একটি ধ্রুবক), এর সমান।

বিভাজন তত্ত্বে অয়লার উপপাদ্য হিসাবে পরিচিত উপপাদ্যটি হল :

'যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n -এর জন্য, স্বতন্ত্র অংশে (with distinct parts) n -এর বিভাজনের সংখ্যা সংখ্যাটির বিজোড় অংশে (with odd parts) বিভাজনের সংখ্যার সমান হবে।'

স্বতন্ত্র অংশ আর বিজোড় অংশ বলতে কি বোঝানো হচ্ছে তা নিচের ব্যাখ্যা থেকে বোঝা যাবে। p(5) -এর ক্ষেত্রে 5, 4+1, 3+2 হল 5 -এর স্বতন্ত্র অংশে বিভাজন ; কারণ, এখানে কোনো সংখ্যাই একবারের বেশি নেই। আর, 5. 3+1+1. 1+1+1+1+1 হল 5 -এর বিজোড় অংশে বিভাজন, কারণ এক্ষেত্রে কেবলমাত্র বিজোড় সংখ্যাই আছে, জোড় সংখ্যা নেই।

p(6) এর ক্ষেত্রেও আমরা অয়লার উপপাদ্যের যাথার্থ যাচাই করতে পারি। আমরা পাই

$$6 = 6,\ 5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 3+2+1,\ 3+3,\ 3+1+1+1,\ 2+2+2,$$
$$2+2+1+1,\ 2+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1$$

এখানে স্বতন্ত্র অংশে বিভাজনের সংখ্যা 4 [যেমন, 6, 5+1. 4+2, 3+2+1] আর বিজোড় অংশে বিভাজনের সংখ্যাও 4 [যেমন, 5+1. 3+3. 3+1+1+1. 1+1+1+1+1+1]।

বিভাজন তত্ত্বে অয়লার কিন্তু এখানেই থেমে থাকেন নি। তিনি p(n) -এর কারিকা অপেক্ষকও (generating function) নির্ণয় করেন। যথা,

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n \text{, যখন } |x| < 1.$$

পাটিগণিতের বুনিয়াদী (basic) ধর্মাবলী ব্যবহার করে অয়লারের উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়। এই উপপাদ্যের সৃষ্টির প্রায় দেড়শ' বছর পরে স্বাধীন ভাবে রজার্স (Rogers) 1894 খ্রিষ্টাব্দে এবং রামানুজন 1913 খ্রিষ্টাব্দে যে উপপাদ্যের অবতারণা করেন, তা দেখতে অয়লারের উপপাদ্যের মতো হলেও গভীরতা অনেক বেশি। উপপাদ্যটি বিবৃত করার আগে আমরা দুটি বাক্যাংশের সঙ্গে পরিচিত হয়ে নিই।

যে সংখ্যার শেষ অঙ্ক 1, 3, 5, 7 অথবা 9 তাকে বলা হয় বিজোড় সংখ্যা আর সেই সংখ্যাকে ভিন্নগোত্রীয় (strange) সংখ্যা বলব যার শেষ অঙ্ক 1, 4. 6 অথবা 9; এ কথা উপপাদ্য বর্ণনার আগে জানা দরকার।

উপপাদ্যটি হল :

'কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর ভিন্ন গোত্রীয় অংশে বিভাজনের (partition in strange parts) সংখ্যা হচ্ছে সংখ্যাটির স্বতন্ত্র অংশে বিভাজনের সংখ্যার সমান (স্বতন্ত্র অংশে বিভাজনে যেন দুটি সংখ্যা ক্রমিক সংখ্যা না হয়)।'

এই উপপাদ্যটি 'প্রথম রজার্স - রামানুজন উপপাদ্য' হিসাবে পরিচিত। এখানে, n = 6 এবং n = 12 হলে ভিন্নগোত্রীয় অংশে বিভাজন ও স্বতন্ত্র অংশে বিভাজনের অংশগুলি দেখানো হল। ফলে এ দুটি ক্ষেত্রে উপপাদ্যের যাথার্থ যাচাই করা যায়।

	ভিন্ন গোত্রীয় অংশে বিভাজন	স্বতন্ত্র অংশে বিভাজন (পর পর দুটি ক্রমিক সংখ্যা বাদ দিয়ে)
(i) n = 6	6, 4+1+1, 1+1+1+1+1+1	6, 5+1, 4+2
	(3টি)	(3টি)
(ii) n = 12	6+6, 6+4+1+1, 6+1+1+1+1+1+1,	12, 11+1, 10+2,
	9+1+1+1, 4+4+4, 4+4+1+1+1+1,	9+3, 8+4, 8+3+1,
	4+1+1+1+1+1+1+1+1, 11+1,	7+5, 7+4+1,
	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1	6+4+2
	(9টি)	(9টি)

এখন প্রশ্ন হল, যে ভাবে কেবল পাটিগণিতের ধর্মাবলী ব্যবহার করে অয়লারের উপপাদ্য প্রমাণ করা গেছে, সেভাবে রজার্স-রামানুজনের উপপাদ্যের প্রমাণ কি সম্ভব? এ প্রশ্নের উত্তর 1981 সালে প্রকাশিত প্রবন্ধ 'A Rogers – Ramanujan's bijection' - এ পাওয়া যায়। এ গারসিয়া (A. Garsia) এবং এস মিল্‌ন -এর (S. Milne) এই প্রবন্ধটি 'Journal of Combinatorial Theory'-তে প্রকাশিত হয়।

বিভাজন তত্ত্বের এই সমস্যায় রামানুজনের চিন্তাকে বিশ্লেষণ করতে গিয়ে জর্জ এন্ড্রুজ (George Andrews) যা বলেছেন, তা বিশেষভাবে প্রণিধানযোগ্য। তিনি বলেছেন এ ক্ষেত্রে 'elegance, depth and surprise are beautifully interwined'।

আমরা আগেই বলেছি, বিভাজন তত্ত্বে বিভাজ্যতা নিয়ে রামানুজন যথেষ্ট

চিন্তা-ভাবনা করেছিলেন। এ সম্বন্ধে আলোচনার আগে এ বিষয়ে কিছু কথা প্রাথমিক ভাবে জানা প্রয়োজন।

m একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং a ও b দুটি পূর্ণ সংখ্যা এবং 'a–b' সংখ্যাটি m দ্বারা বিভাজ্য হলে আমরা লিখি $a \equiv b \pmod{m}$ এবং বলি 'a is equivalent to b modulo m' বা 'a is congruent b modulo m'।

যাই হোক, রামানুজনের সময় পর্যন্ত n স্বাভাবিক সংখ্যার বিভাজন সংখ্যা p(n) -এর পাটিগাণিতিক ধর্মাবলী সম্বন্ধে খুব কম জানা ছিল। হার্ডির বলেছেন, 'Ramanujan was first and upto now, the only mathematician to discover any such properties'।

1742 খ্রিষ্টাব্দে অয়লার নিচের অভেদটি প্রমাণ করেন :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots\ldots} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n \text{ , যখন } |x|<1,$$

যার কথা আগেই উল্লেখ করা হয়েছে।
আর একটি অয়লারের অভেদ হল

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n+1)/2}$$

তাছাড়া জ্যাকোবির (Jacobi) একটি সূত্র হল

$$\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots\}^3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{n(n+1)/2}$$

রামানুজন উপরের তিনটি সূত্রের সাহায্য নিয়ে প্রমাণ করেন যে p(5n+4) যে কোন n -এর জন্য 5 দ্বারা বিভাজ্য। তাছাড়া 1919 সালে তিনি p(n) -এর আরো কিছু বিভাজ্যতা বিষয়ক সূত্র আবিষ্কার করেন। তিনি দেখান যে

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5};$$
$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod{7};$$
$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11};$$

অর্থাৎ, p(4), p(9), p(14), p(19), ... 5 দ্বারা বিভাজ্য ;

$p(5), p(12), p(19), p(26), \ldots\ldots\ldots\ldots$ 7 দ্বারা বিভাজ্য ;

$p(6), p(17), p(28), p(39), \ldots\ldots\ldots\ldots$ 11 দ্বারা বিভাজ্য।

$n = 0$ হলে, আমরা পাই

$$p(4) = 5,\ p(5) = 7,\ p(6) = 11.$$

রামানুজন আরও প্রমাণ করেন যে,

$$p(25n+24) \equiv 0 \pmod{5^2};$$
$$p(49n+47) \equiv 0 \pmod{7^2};$$
$$p(121n+116) \equiv 0 \pmod{11^2}.$$

এখানেই তিনি থেমে থাকেন নি ; এ ব্যাপারে সাধারণ সূত্রে উপনীত হবার চেষ্টা করে এ শাখায় গবেষণার ক্ষেত্রকে তিনি আরও প্রশস্ত করে গেছেন।

এখানে উল্লেখের দাবি রাখে যে, হার্ডি ও রামানুজন আবিষ্কৃত 'বৃত্তীয় পদ্ধতি' বৈশ্লেষিক সংখ্যা তত্ত্ববিদদের কাছে এক শক্তিশালী হাতিয়ার হিসাবে বিবেচিত। কোনো নির্দিষ্ট n-এর জন্য পূর্ণ সংখ্যার n -ঘাতের যোগফল হিসাবে পূর্ণ সংখ্যাকে প্রকাশ করার সমস্যা, যা বিখ্যাত 'Waring's problem' হিসাবে খ্যাত, তার সমাধানে এ পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়। প্রসঙ্গত ওয়ারিং (Waring) প্রমাণ ছাড়াই উল্লেখ করেন যে প্রত্যেক সংখ্যাকেই চারটি বর্গ, 9টি ঘন, 19টি চতুর্ঘাত ইত্যাদি সংখ্যার যোগফলের আকারে প্রকাশ করা যায়। তিনি কোনো প্রমাণ দেন নি। প্রায় 200 বছর পরে হিলবার্ট (Hilbert) প্রথম এর সত্যতা প্রমাণ করেন। আর মডিউলার তত্ত্বের উপর রামানুজনের আবিষ্কৃত ফলসমূহ পদার্থবিদ্যায় বিশেষ করে রজ্জু তত্ত্বে (string theory) নানাভাবে ব্যবহার করা হচ্ছে।

8. π, $\sqrt{2}$ -এর মান নির্ণয়ে রামানুজন

আমরা জানি $\sqrt{2}$, π, e -এর মত অমূলদ সংখ্যাগুলি রামানুজনের মনের খেলাঘরের বস্তু ছিল। তিনি মুখে মুখে এদের আসন্ন মান যে কোনো দশমিক স্থান পর্যন্ত বলে দিতে পারতেন। রামানুজনের নোটবইতে অমূলদ সংখ্যার বিভিন্ন আসন্ন মানের উল্লেখ আছে। এখানে তার মধ্যে কিছু নিচে দেওয়া হল।

π, $\sqrt{2}$ -এর মান নির্ণয়ে রামানুজন

$$\pi = 3.1415926535.8979323846.2643$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \cdots\cdots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1+\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{13}{4^2}\cdot\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^3+\frac{19}{4^3}\cdot\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^3+\cdot$$

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots\ \cdots\cdots$$

$$\frac{7}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{5}\right) = 3\cdot14162$$

উল্লেখ করা যেতে পারে, রামানুজন π -এর মান নির্ণয় করার জন্য নানা রকম সূত্র উদ্ভাবন করেছিলেন। এখানে তাদের কিছু উল্লেখ করা হল:

(i) $$\pi = \frac{12}{\sqrt{190}}\log\left[\left(2\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)\right]$$

(ii) $$e^{\pi\sqrt{58}} = 24591257751\ 99999982$$

(iii) $$\pi = \frac{24}{\sqrt{142}}\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]$$

(iv) $$\frac{1}{\pi} = 2\sqrt{2}\left[\frac{1103}{99^2}+\frac{27493}{99^6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{4^2}+\frac{53883}{99^{10}}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{4^2\cdot8^2}+\cdots\right]$$

(v) '2a' কে পরাক্ষের দৈর্ঘ্য এবং $3\tan\frac{\pi}{8}$ কে উৎকেন্দ্রতা ধরে উপবৃত্তের পরিসীমার সূত্র হিসাবে রামানুজন যে সূত্রটির উল্লেখ করেছেন তা হল

$$a\sqrt{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)}\right).$$

এ সূত্রটি গণিতবিদদের কাছে এক অসাধারণ সূত্র হিসাবে বিবেচিত।

(vi) $\frac{63}{25} \cdot \frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}} = 3 \cdot 14159265380 \cdot \cdots$

উল্লেখ করা যেতে পারে, 1986 খ্রিষ্টাব্দে দু'জন কমপিউটার বিজ্ঞানী জে এম ব্রুয়েন (J.M. Brwein) এবং পি বি ব্রুয়েন (P.B. Brwein) রামানুজনের একটি সূত্র অনুসরণ করে π -এর আসন্নমান 170 লক্ষ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে সমর্থ হন। তাঁরা লক্ষ করেন যে আগের অন্য পদ্ধতির চেয়ে রামানুজনের পদ্ধতি অনেক বেশি কার্যকরী।

এ প্রসঙ্গে বলা যেতে পারে যে, 1997 খ্রিষ্টাব্দে প্রকাশিত ডেভিড ব্লানটার (David Blanter) লিখিত 'Joy of π' নামের প্রবন্ধ থেকে জানা যায় — দুই গণিতজ্ঞ ডেভিড (David) এবং গ্রেগরি চুড্‌নোভস্কি (Gregory Chudnovsky) সবচেয়ে বেশি সংখ্যক অঙ্ক পর্যন্ত π-এর আসন্ন মান নির্ণয়ে বিশ্ব রেকর্ডের অধিকারী। প্রথমে তাঁরা 4500 লক্ষ স্থান পর্যন্ত এবং পরে 1×10^{12} স্থান পর্যন্ত এবং তার পরে 2×10^{12} স্থান পর্যন্ত π-এর মান নির্ণয় করেন। বর্তমান রেকর্ড হল 5×10^{12} স্থান পর্যন্ত।

9. অভেদ

রামানুজনের অভেদসমূহের সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে অধ্যাপক হার্ডি বলেছেন, 'যদি আমাকে রামানুজনের সমস্ত কাজ থেকে একটি সূত্র নির্বাচন করতে দেওয়া হয়, তবে আমি মেজর ম্যাকমোহনের সঙ্গে সহমত হয়ে নিচের সূত্রটি নির্বাচন করব :

$$p(4) + p(9)x + p(14)x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{5\{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15}) \cdot \cdots \cdot\}^5}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\cdots\}^6},$$

যেখানে p(n), সংখ্যা n -এর বিভাজন সংখ্যাকে নির্দেশ করে।'

উল্লেখ করা যেতে পারে, এই অভেদটি 'Some properties of p(n), the number of partitions of n' শীর্ষক প্রবন্ধে প্রকাশিত হয়। রামানুজনের এই

প্রবন্ধে অ.রও একটি অসাধারণ অভেদের উল্লেখ ছিল ; সেটি হল

$$p(5) + p(12)x + p(19)x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{5\{(1-x^7)(1-x^{14})(1-x^{21})\cdots\}^3}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\}^4} + \frac{49x\{(1-x^7)(1-x^{14})\cdots\}^7}{\{(1-x)(1-x^2)\cdots\}^8}$$

লক্ষণীয়, এই অভেদ দুটি যথাক্রমে 5 এবং 7 দ্বারা $p(5n+4)$ এবং $p(7n+5)$ -এর বিভাজ্যতাকে প্রতিষ্ঠিত করে।

এবারে 'রজার্স - রামানুজন অভেদ' নামে পরিচিত সূত্র দুটি উল্লেখ করব। সূত্র দুটি হল

(i) $$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\cdots\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^{n^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}+\cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11})(1-x^{16})\cdots} \quad \frac{1}{(1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14})\cdots}$$

(ii) $$1+\frac{x^2}{1-x}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^{12}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{x^{n(n+1)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}+\cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^7)(1-x^{12})(1-x^{17})\cdots} \quad \frac{1}{(1-x^3)(1-x^8)(1-x^{13})(1-x^{18})\cdots}$$

এই সূত্র দুটির এক অদ্ভুত ইতিহাস আছে। 1894 খ্রিষ্টাব্দে রজার্স সূত্র দুটি আবিষ্কার করেন আর 1913 খ্রিষ্টাব্দের কিছু আগে রামানুজন এদের পুনরাবিষ্কার করেন। মজা হল, রামানুজনের পুনরাবিষ্কারের পরই এই সূত্র দুটি বিখ্যাত হয়। যখন রামানুজন এই সূত্র দুটি আবিষ্কার করেন, তখন এর প্রমাণ তাঁর জানা ছিল না। কিন্তু পরে তা তিনি প্রমাণ করেন। পরবর্তী কালে অনেকেই এই অভেদের প্রমাণ করেছেন,

এবং বর্তমানে এর সাতটি বিভিন্ন প্রমাণ আছে যার মধ্যে রজার্স ও রামানুজনের প্রমাণও আছে। যা সবচেয়ে উল্লেখযোগ্য তা হল আর জে ব্যাক্সটার (R.J. Baxter) Statistical Mechanics -এর Hard Hexagon Model-এর সমাধানে এই অভেদের ব্যবহার করেছেন।

10. বারনৌলি সংখ্যা

$$1^r + 2^r + 3^r + \cdots\cdots + n^r = S_r$$ হলে

আমরা পাই,

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$ [প্রথম n স্বাভাবিকসংখ্যার সমষ্টি]

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$ [প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি]

$$S_3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$ [প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি]

এ সব সূত্র প্রাচীন কালেও জানা ছিল। প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার চতুর্থঘাতের সমষ্টি

$$S_4 = \left(\frac{S_1 - 1}{5} + S_1\right) S_2 ;$$

এই সূত্রটি আল্-কাশি -এর (Al-Kashi, প্রায় 1430 খ্রিঃ) লেখা 'Key to computation' -এ পাওয়া যায়।

যে কোন m -এর জন্য S_m অর্থাৎ ($1^m + 2^m + \ldots\ldots + n^m$) -এর মান নির্ণয়ের জন্য সূত্র নির্ধারণের বিষয়টি সপ্তদশ শতাব্দীর গণিতজ্ঞদের তীব্রভাবে আকর্ষণ করে। কিন্তু এর নির্ণয়ের নিয়ম প্রকাশিত হয় 1713 খ্রিষ্টাব্দে জ্যাকুইস বারনৌলির (Jacques Bernoulli, 1654 – 1705) লেখা 'Ars Conjectandi' -তে। লেখাটি তাঁর মৃত্যুর পরে প্রকাশিত হয় এবং এতে পাওয়া সংখ্যাগুলিকে অয়লারই বারনৌলির নামানুসারে 'বারনৌলি সংখ্যা' (Bernoulli numbers) হিসাবে আখ্যায়িত করেন। বারনৌলি সংখ্যাগুলিকে $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots B_n, \ldots\ldots\ldots$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বারনৌলি সংখ্যা

অধুনা বারনৌলি সংখ্যাকে নিচের মত সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$f(x) \equiv \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \qquad |x| < 2\pi \;;$$

এখানে B_n হল বারনৌলি সংখ্যা এবং $f(x)$ হল বারনৌলি সংখ্যা সমূহের কারিকা অপেক্ষক (generating function)।

উল্লেখ করা যেতে পারে, বারনৌলি সংখ্যা নির্ণয় করার নানা পদ্ধতি প্রচলিত আছে। উৎসাহী পাঠকরা বার্নার্ড ও চাইল্ড (Barnard and Child) -এর লেখা 'Higher Algebra' দেখতে পারেন। রামানুজন তাঁর নিজস্ব পদ্ধতির মাধ্যমে বারনৌলি সংখ্যা নির্ণয় করেন। তিনি বারনৌলি সংখ্যা নিয়ে অনেক উল্লেখযোগ্য কাজ করেছেন। এ শাখায় তাঁর কাজ অনেকের কাছে স্বর্ণখনি হিসাবে বিবেচিত হয়।

লক্ষণীয় যে, রামানুজনের প্রথম প্রকাশিত প্রবন্ধ হল বারনৌলি সংখ্যার উপর। 1911 খ্রিষ্টাব্দে ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে (Vol 3, P 219–234) 'Some Properties of Bernoulli's Numbers' শিরোনামে তাঁর প্রবন্ধটি প্রকাশিত হয়। মজা হল, প্রকাশের আগে জার্নালের সম্পাদক ও রামানুজনের মধ্যে অন্তত তিনবার প্রবন্ধটি চালাচালি হয়েছে।

বারনৌলি সংখ্যাগুলি হল মূলদ সংখ্যা। প্রথমটি (B_1) ছাড়া বাকি বিজোড় সংখ্যা সম্বলিত বারনৌলি সংখ্যা B_{2m+1} $(m \geq 1)$ হল শূন্য মান-বিশিষ্ট। নিচের তালিকা থেকে বিভিন্ন বারনৌলি সংখ্যার মান জানা যাবে।

$$B_1 = -\frac{1}{2} \qquad B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_{14} = \frac{7}{6}$$

$$B_4 = -\frac{1}{30} \qquad B_{16} = -\frac{3617}{510}$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \qquad B_{18} = \frac{43867}{798}$$

$$B_8 = -\frac{1}{30} \qquad B_{20} = -\frac{174761 1}{330}$$

$$B_{10} = \frac{5}{66} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

রামানুজন বারনৌলি সংখ্যার ধর্মাবলী সম্বন্ধে অনেক আলোচনা করেছেন। এখানে নিচে তার দু'একটির উল্লেখ করা হল।

(1) B_n -এর হরকে (যখন n শূন্য ছাড়া অন্য জোড় সংখ্যা) মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে 2 এবং 3 কে উৎপাদক হিসাবে ঠিক একবারই পাওয়া যাবে।

(2) n জোড়সংখ্যা হলে B_n একটি ভগ্নাংশ, কিন্তু $2(2^n-1)B_n$ একটি পূর্ণসংখ্যা।

(3) $$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\cdots=\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$$

(4) $$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots\cdots=\frac{2^{2n}-1}{2(2n)!}B_{2n}$$

11. পরা জ্যামিতিক শ্রেণী এবং অসীম শ্রেণী

বৃটিশ গণিতজ্ঞ জন ওয়ালি (John Wallies) নিচের মতো শ্রেণী সম্বন্ধে আলোচনা করেছেন :

$$1 + a + a(a+1) + a(a+1)(a+2) + \cdots\cdots\cdots . \quad (1)$$

(1) নং শ্রেণীকে

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots\cdots\cdots \text{ এর}$$

একটি সামান্যীকরণ হিসাবে নেওয়া যেতে পারে। (1) নং শ্রেণীকে পরা জ্যামিতিক শ্রেণী (hyper geometric series) হিসাবে অভিহিত করা হয়।

অসীম শ্রেণী $1+\frac{ab}{c}\cdot\frac{Z}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{Z^2}{2!}+\cdots\cdots$ কে সাধারণত ${}_2F_1(a, b; c; Z)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং 1812 খ্রিষ্টাব্দে গাউস এটিকে এ ভাবেই সংজ্ঞায়িত করেন। তিনি প্রমাণ করেন

$${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\cdot\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\cdot\Gamma(c-b)},$$

যেখানে $\Gamma(x)$ হচ্ছে সাধারণ গামা-অপেক্ষক ; $\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1)$ [$= (x-1)!$; x ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা সাপেক্ষে] এবং $\Gamma(0) = 1$.

এটিই বিখ্যাত 'Gauss Summation Theorem'।

পরা জ্যামিতিক শ্রেণী এবং অসীম শ্রেণী

পরবর্তী কালে এই পরা গুণোত্তর শ্রেণীটি লেখা হয় নিচের মতো

$$ {}_2F_1(a,b;c;Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{Z^n}{n!}, $$

যেখানে $(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)$ এবং $(a)_0 = 1$।

এর প্রবক্তা বার্নেস (Bernes) (1907 খ্রিষ্টাব্দে)। আর এ ক্ষেত্রে অয়লারের সমাকলীয় প্রকাশনার (integral representation) ধারণা প্রযুক্ত। প্রসঙ্গত পরা গুণোত্তর শ্রেণী এখানেই থেমে থাকে নি ; একে আরও সামান্যীকরণ করে ${}_rF_s(\cdot)$ এর ধারণাও আজ গণিতের অন্তর্গত। এখানে এটা বলা প্রয়োজন যে, রামানুজন পরা গুণোত্তর শ্রেণী সম্বলিত নানা অভেদ নির্ণয় করেন। গাউস (Gauss), কুমার (Kummar), ডুগ্যাল (Dougall), ডিক্সন (Dixon) প্রমুখ বহু গণিতজ্ঞের প্রদত্ত বহু উপপাদ্য তিনি পুনরাবিষ্কার করেন। সাথে তাঁর নিজস্ব সূত্রগুলো তো আছেই। কিছু কৌতূহল-উদ্দীপক রামানুজনের সূত্র নিচে দেওয়া হল।

(I) $1 + 3\,\dfrac{x-1}{x+1} + 5\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x-2}{x+2} + \cdots = x$

(II) $1 - \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x-2}{x+2} - \cdots = \dfrac{2}{2x-1}$

(III) $1 - 3\cdot\dfrac{x-1}{x+1} + 5\,\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x-2}{x+2} - \cdots = 0$

(IV) $1 + 3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 + 5\left(\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2 + \cdots = \dfrac{x^2}{2x-1}$

(V) $1 - 3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 + 5\left(\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2 - \cdots = \dfrac{\Gamma(x+1)^2}{\Gamma(2x)}$

হার্ডিকে পাঠানো রামানুজনের কিছু অসীম শ্রেণীর উপপাদ্যগুলির মধ্যে ক

হল

(I) $\dfrac{1}{1^3}\cdot\dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^3}\cdot\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3}\cdot\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{4^3}\cdot\dfrac{1}{2^4} + \cdots\cdots$

$$ = \frac{1}{6}(\log 2)^3 - \frac{\pi^2}{12}\cdot\log 2 + \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots\cdots\right) $$

(2) $$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^{4}+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^{4}+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^{4}+\cdots\ \cdots$$

$$=\frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}\left\{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^{2}}$$

(3) $$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^{3}-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^{3}+\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

(4) $$\frac{1^{13}}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^{13}}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^{13}}{e^{6\pi}-1}+\cdots\cdots=\frac{1}{2^{4}}$$

(5) $$1-\frac{3!}{(1!2!)^{3}}x^{2}+\frac{6!}{(2!4!)^{3}}x^{3}-\cdots\cdots$$

$$=\left(1+\frac{x}{(1!)^{3}}+\frac{x^{2}}{(2!)^{3}}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^{3}}+\frac{x^{2}}{(2!)^{3}}-\cdots\right)$$

এই উপপাদ্যগুলি সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে হার্ডি বলেছিলেন, (3) নং উপপাদ্যটি তাঁর কাছে অপরিচিত নয়; 1859 খ্রিষ্টাব্দে বাউয়ার (Baur) এটি প্রমাণ করেন। (2) নং উপপাদ্যটি একটু কঠিন। পরে হার্ডি এবং তাঁর সহযোগীরা দেখিয়েছেন যে, (2) ও (3) সূত্র দুটি পরা জ্যামিতিক শ্রেণীর অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে পাওয়া যায়। এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, (2) এবং (3) সূত্র দুটি ডুগ্যালের উপপাদ্যের বিশেষ আকার। পরে হার্ডি জানতে পারেন 1910 খ্রিষ্টাব্দের কিছু আগে রামানুজন (2) এবং (3) নং সূত্র দুটির আরও সামান্যীকরণ করেন। পরবর্তীকালে এটিই বিখ্যাত 'ডুগ্যাল-রামানুজন অভেদ' রূপে বিবেচিত।

12. ম্যাজিক বর্গ

পূর্ণবর্গ সংখ্যক বর্গাকৃতি ছকে কিছু সংখ্যক পূর্ণসংখ্যা যদি এমন ভাবে সাজানো হয় যে প্রতিটি সারি, স্তম্ভ আর কর্ণ বরাবর সংখ্যাগুলির সমষ্টি সমান, তা হলে এই সব ছকের সমবায়ে গঠিত যে বড়ো আকারের বর্গাকৃতি ছক নির্ণীত হয় তাকেই ম্যাজিক বর্গ (Magic Square) বলা হয়। ম্যাজিক বর্গে সাজানো সংখ্যাগুলি যদি 1 থেকে শুরু করে n^2 পর্যন্ত পরপর ক্রমিক সংখ্যা হয়, তবে ম্যাজিক বর্গটিকে

n -ক্রমের ম্যাজিক বর্গ বলা হয়, ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots$) এবং সে ক্ষেত্রে ম্যাজিক সংখ্যা (অর্থাৎ প্রতিটি সারি বা স্তম্ভ বা কর্ণবরাবর অবস্থিত সংখ্যাগুলির সমষ্টি) হবে $\frac{1}{2}n(n^2+1)$। যেমন তিন-ক্রমের ম্যাজিক বর্গের ম্যাজিক সংখ্যা 15, চার-ক্রমের ম্যাজিক সংখ্যা 34।

1 থেকে শুরু না করে এবং ক্রমিক সংখ্যা না নিয়েও ম্যাজিক বর্গ তৈরি হতে পারে। মনে রাখা দরকার, সংখ্যা দিয়ে তৈরি এমন বর্গও পাওয়া যেতে পারে, যেখানে প্রতিটি সারির সমষ্টি সমান এবং প্রতিটি স্তম্ভের সমষ্টি সমান কিন্তু তারা এক নয় বা কর্ণের সমষ্টিও ভিন্ন। আর যদি কোনো ম্যাজিক বর্গের ম্যাজিক সংখ্যা n হয়, তবে তাকে n-র ম্যাজিক বর্গ বলা হয়।

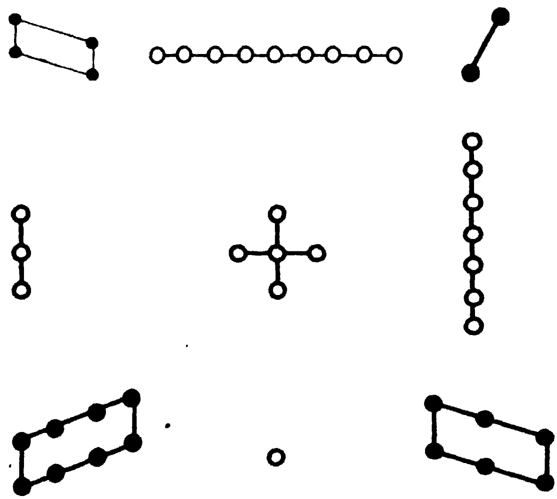
ম্যাজিক বর্গের ধারণা খুব প্রাচীন। আনুমানিক 2200 খ্রিঃ পূর্বাব্দে সম্রাট য়ু-এর (Emperor Yu) আমল থেকে চীনে এর প্রচলন। "The first definite trace that we have of it (magic square) is in the 'I–King'"। 'I–King' বা 'বিন্যাসের গ্রন্থ'টি প্রাচীনতম চীনা গ্রন্থের একটি। গ্রন্থটি ম্যাজিক বর্গ ও বিন্যাসের উপর প্রথম গ্রন্থ হিসাবে বিবেচিত। রহস্যময় চিহ্ন 'লো-শু' (lo–shu) এবং 'হো-তু' (ho–t'u) পাওয়া যায় গ্রন্থটিতে। চীন দেশ থেকে ম্যাজিক বর্গের ধারণা প্রাচ্য এবং পরে পাশ্চাত্যে গিয়ে পৌঁছোয়। বলা যেতে পারে, ম্যাজিক বর্গের প্রসারের মূলে কিছু রহস্যমূলক বা অতীন্দ্রিয় ধারণা ছিল। ধারণা ছিল ম্যাজিক বর্গ মঙ্গলের প্রতীক — অমঙ্গল দূর করে সৌভাগ্য আনয়ন করে।

আনুমানিক নবম শতাব্দীতে ভারত ও আরব দেশে ম্যাজিক বর্গের ধারণা চীন দেশ থেকে আসে এবং তা আসে ব্যবসা-বাণিজ্যে কর্মরত ব্যক্তিদের মাধ্যমে। তখন থেকেই উন্নত ধরনের ম্যাজিক বর্গের সন্ধান চলতে থাকে। আনুমানিক দ্বাদশ শতাব্দীতে খাজুরাহোর শিলালিপিতে ম্যাজিক বর্গ চিত্রিত হয়। এগুলি হয় চার-ক্রমের।

ইউরোপে ম্যাজিক বর্গের প্রথম প্রচলন হয় পঞ্চদশ শতাব্দীর প্রথম ভাগে কনস্টান্টিনোপলে বসবাসকারী মোসকোপুলাস -এর (Moschopulus) মাধ্যমে। বিখ্যাত কর্নেলিয়াস এগ্রিপ্পা (Cornelius Agrippa, 1486–1535) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ক্রমের ম্যাজিক বর্গ গঠন করেন --- যথাক্রমে জ্যোতিষীয় সাতটি গ্রহ শনি, বৃহস্পতি, মঙ্গল, রবি, শুক্র, বুধ এবং চন্দ্রের সঙ্গে যুক্ত করে। তাছাড়া রূপার পাতে লিখিত ম্যাজিক বর্গ অনেক সময় প্লেগের বিরুদ্ধে রক্ষাকবচ হিসাবে গণ্য হত। অ্যালবার্ট ডুরের (Albert Durer) 'মেলানকলি' (Melancholy) চিত্রে (1514

খ্রিষ্টাব্দে চিত্রিত) চার-ক্রমের ম্যাজিক বর্গ [চিত্র (iii)] পাওয়া যায়, যার নিচের সারির মাঝের দুটি ছকে এই সাল চিত্রিত আছে।

ম্যাজিক বর্গের প্রাচীনতম উদাহরণ হল তিন-ক্রমের 15 -এর ম্যাজিক বর্গ [চিত্র (ii)], যা হল 'লো-শু' (lo-shu) নামে খ্যাত রহস্যময় চিহ্নের [চিত্র (i)] গাণিতিক ব্যাখ্যা। কথিত আছে সম্রাট য়ু যখন পীত নদীর তীরে দাঁড়িয়ে ছিলেন তখন একটি পবিত্র কচ্ছপের আবির্ভাব ঘটে যার পিঠে দুটি রহস্যময় চিহ্ন ছিল। একটি হল 'লো-শু', অন্যটি হল 'হো-তু' (ho-t'u)। চিত্র (i) এবং চিত্র (ii) নিচে দেওয়া হল।



চিত্র (i) [লো-শু]

[কালো বৃত্তগুলি মহিলা (জোড়) সংখ্যা এবং সাদা বৃত্তগুলি পুরুষ (বিজোড়) সংখ্যাকে নির্দেশ করে।]

'লো-শু' যে 15 -এর ম্যাজিক বর্গকে নির্দেশ করে তা হল চিত্র (ii)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

চিত্র (ii)

উপরের ম্যাজিক বর্গটি এখন বহু চীনাগ্রন্থে পাওয়া যায় এবং প্রাচ্যের অনেক ভবিষ্যৎ গণনাকারী এর ব্যবহার করেন।

এবারে চার-ক্রমের ম্যাজিক বর্গ (34 -এর ম্যাজিক বর্গ) দেওয়া হল যা অ্যালবার্ট ডুরের চিত্রে চিত্রিত এবং যাকে অনেকেই ইউরোপে প্রচলিত প্রথম ম্যাজিক বর্গ হিসাবে বিবেচনা করেন।

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

চিত্র (iii)

ম্যাজিক বর্গ গঠন এবং গঠনের নিয়ম নিয়ে অনেক গণিতজ্ঞই তাদের অনেক সময় অতিবাহিত করেছেন। তাঁরা ম্যাজিক বর্গের মোহনীয় আকর্ষণে আকৃষ্ট হয়েছেন এবং অবসর বিনোদনের প্রকৃষ্ট মাধ্যম হিসাবেও বেছে নিয়েছেন। ডি লা লৌবার (De la Loubere), অয়লার, ফ্রাঙ্কলিন, রোজার (Rosser), ওয়াকার (Waker), হিথ (Heath) প্রভৃতি গণিতজ্ঞ ম্যাজিক বর্গের গঠন এবং তা নির্ধারণের কৌশল নিয়ে কাজ করেছেন। ছাত্রাবস্থা থেকেই রামানুজন এ ব্যাপারে আগ্রহী ছিলেন। তাঁর নোটবইয়ের প্রথম খণ্ড এবং দ্বিতীয় খণ্ডের প্রথম অধ্যায়ে ম্যাজিক বর্গ নিয়ে আলোচনা আছে। প্রথম নোটবই শুরু হয়েছিল সরল থেকে জটিল ম্যাজিক বর্গ দিয়ে। এগুলি ভাল করে অনুধাবন করলে যে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, তা হল এ সম্বন্ধে রামানুজনের কৌতূহল ছিল 'in raising off–beat questions and doing off–beat things'।

প্রথমে নিচের দুটি গাণিতিক 'গঠন-ছক' (composition–table) দিয়ে শুরু করে এ বিষয়ের আলোচনায় অগ্রসর হতে হবে।

+	A	B	C
P	P+A	P+B	P+C
Q	Q+A	Q+B	Q+C
R	R+A	R+B	R+C

ছক (i)

+	A	B	C	D
P	P+A	P+B	P+C	P+D
Q	Q+A	Q+B	Q+C	Q+D
R	R+A	R+B	R+C	R+D
S	S+A	S+B	S+C	S+D

ছক (ii)

লক্ষণীয়, ছক (i) -এ P, Q, R এবং A, B, C এই ছয়টি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা নির্বাচন করে আমরা এদের সমষ্টি হিসাবে নয়টি বিভিন্ন সংখ্যা পেতে পারি ; আর ছক (ii) -এ চার আর চার মোট আটটি বিভিন্ন সংখ্যার সাহায্যে ষোলটি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা পেতে পারি।

এখন প্রশ্ন হচ্ছে, কোন্ ঘরে কোন্ অক্ষর বসালে যাতে আলাদা ভাবে অবস্থিত দুটি বর্গ থেকে (A+B+C+P+Q+R) -এর ম্যাজিক বর্গ পাওয়া যাবে? নিচে এর উত্তর দেওয়া হল ।

C	A	B
A	B	C
B	C	A

ছক (iii)

Q	P	R
R	Q	P
P	R	Q

ছক (iv)

C+Q	A+P	B+R
A+R	B+Q	C+P
B+P	C+R	A+Q

ছক (v)

উল্লেখ করা যেতে পারে, ছক (iii) এবং ছক (iv) যথাক্রমে ছক (vi) এবং ছক (vii) - এর পরিকল্পনা অনুসারে সাজানো হয় ; কোণায় অবস্থিত ফাঁকা ঘরে আমরা প্রয়োজন মত অক্ষর বসিয়ে নেব।

	^	×
^	×	✓
×	✓	

ছক (vi)

×	^	
✓	×	^
	✓	×

ছক (vii)

উল্লেখ্য, ছক (v), ছক (vi), ছক (vii) রামানুজনের নোটবইয়ের অনুকরণে লেখা। যেটা লক্ষণীয় তা হল, ছক (v)-এ প্রতিটি সারি বা স্তম্ভ বরাবর সমষ্টি (A+B+C+P+Q+R) হলেও কর্ণ বরাবর তা নয়। কিন্তু এখন যদি A, B, C সমান্তর প্রগতিতে থাকে এবং P, Q, R সংখ্যাগুলিও সমান্তর প্রগতিতে থাকে তাহলে 3B = A+B+C এবং 3Q = P+Q+R এবং ছক (v) তখন কিন্তু (A+B+C+P+Q+R) -এর ম্যাজিক বর্গে রূপান্তরিত হয়।

রামানুজন তাঁর নোটবইতে ম্যাজিক বর্গ সংক্রান্ত যে সব প্রশ্ন, সমাধান ও নানা বর্গ গঠন করেছেন তাদের কিছু এখানে দেওয়া হল।

ম্যাজিক বর্গ

প্রশ্ন-1 ঃ *$A+P$, $B+P$, $C+P$, $D+P$ -এর মান 8, 10, 11 এবং 14 হলে $A+R$, $B+R$, $D+R$ -এর মান নির্ণয় কর, যখন $C+R = 25$ ।*

সমাধান ঃ $A+R = 22$, $B+R = 24$ এবং $D+R = 28$ ।

লক্ষণীয়, $(A+P) - (C+P) = 8-11$

$$\therefore\ A-C = -3$$

$$\therefore\ A+R = (A-C) + (C+R)$$

$$= -3 + 25 = 22$$

অনুরূপভাবে,

$$B+R = (B+P) - (C+P) + (C+R)$$

$$= -1 + 25 = 24$$

এবং $$D+R = (D-C) + (C+R)$$

$$= 3 + 25 = 28$$

প্রশ্ন -2 ঃ *একটি কর্ণকে বাদ দিয়ে একটি 19 -এর বর্গ গঠন কর।*

সমাধান ঃ

10	2	7
4	6	9
5	11	3

এখানে লক্ষ করলে আমবা দেখতে পাব যে, A = 1, B = 4, C = 8 এবং P = 1, Q = 2, R = 3 নিলে ছক (v) উল্লিখিত বর্গে পরিণত হবে। এখানে একটি মাত্র কর্ণের যোগফল 18। অন্য সব সমষ্টি 19 এবং এখানে A, B, C সমান্তর প্রগতিতে নেই।

প্রশ্ন -3 ঃ *তিনটি সারি নিয়ে একটি বর্গ গঠন কর যার একটি সারি বা স্তম্ভের যোগফল r, মাঝের সারি বা স্তম্ভের যোগফল m এবং কর্ণের যোগফল c এবং x মাঝখানের রাশি।*

(i) যদি r, m, c ভিন্ন ভিন্ন হয়, তাহলে মাঝখানে $\frac{1}{3}(m_1+m_2+c_1+c_2-s)$ লেখ, যেখানে s বর্গে সমস্ত অবস্থিত সংখ্যাগুলির সমষ্টি এবং বাকি রাশিগুলি সরবরাহ কর।

(ii) যদি সারি ও স্তম্ভের যোগফল সমান হয়, কর্ণ বরাবর সমষ্টি ভিন্ন হয়, তবে $\left(\frac{c_1+c_2-r}{3}\right)$ মাঝখানে লিখ।

সমাধান : (i) এখানে m_1 এবং m_2 হল মাঝখানের সারির এবং c_1 ও c_2 মাঝখানের স্তম্ভের যোগফল এবং c_1 ও c_2 হল কর্ণ বরার সংখ্যাগুলির সমষ্টি।

$$\therefore\ m_1 + m_2 + c_1 + c_2 = s + 3x$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + c_1 + c_2 - s)$$

যেহেতু r, m, c এর মধ্যে এইটিই একমাত্র সম্পর্ক, আমরা বাকি সংখ্যাগুলি ঠিক মতো নির্বাচন করে সরবরাহ করতে পারি।

(ii) $$x = \left(\frac{c_1 + c_2 - r}{3}\right)$$

কিন্তু, $c_1 = c_2 = r$

$$\therefore\ x = \frac{r}{3}$$

প্রশ্ন - 4 : *বর্গ গঠন কর যখন*

(i) $r = m = c = 15$

(ii) $r = m = c = 27$ এবং সংখ্যাগুলি বিজোড়

(iii) $r = m = c = 36$ এবং সংখ্যাগুলি জোড়

(iv) $r = m = c = 63$ এবং সংখ্যাগুলি 3 -এর গুণিতক

সমাধান : (i)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

(ii)

15	1	11
5	9	13
7	17	3

(iii)

14	4	18
16	12	8
6	20	10

(iv)

24	9	30
27	21	15
12	33	18

এই সব প্রশ্ন ও সমাধান ছাড়াও আরো কিছু ম্যাজিক বর্গ নোটবইতে পাওয়া যায়। তাদের কিছু এখানে নিচে তুলে ধরা হল।

34 -এর ম্যাজিক বর্গ [চার-ক্রমের]

1	14	11	8
12	7	2	13
6	9	16	3
15	4	5	10

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

35 -এর ম্যাজিক বর্গ

1	15	11	8
12	7	2	14
6	9	17	3
16	4	5	10

[এখানে 1 থেকে 17 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে 13 বাদ দিয়ে বাকি সংখ্যাগুলি ব্যবহার করা হয়েছে।]

66 -এর ম্যাজিক বর্গ

1	30	27	8
28	7	2	29
6	25	32	3
31	4	5	26

9	22	19	16
20	15	10	21
14	17	24	11
23	12	13	18

[এখানে দ্বিতীয়টিতে 9 থেকে 24 পর্যন্ত ষোলটিএবং প্রথমটিতে 1 থেকে 32 মধ্যে 9 থেকে 24 পর্যন্ত সংখ্যা বাদ দিয়ে 16টি সংখ্যা ব্যবহৃত।]

পাঁচ ক্রমের সাধারণ ম্যাজিক বর্গের আকার

A+P	E+R	D+T	C+Q	B+S
C+T	B+Q	A+S	E+P	D+R
E+S	D+P	C+R	B+T	A+Q
B+R	A+T	E+Q	D+S	C+P
D+Q	C+S	B+P	A+P	E+T

13. সমাকল সমূহ

নানা ধরনের সমাকল নিয়ে রামানুজনের গবেষণা বিশাল ব্যাপ্তি নিয়ে গণিতের রাজ্যে বিরাজমান। এখানে কিছু সমাকলের উল্লেখ করা হল।

$$(1)\quad \int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\cdots\cdots dx$$

$$= \frac{\pi^{1/2}\cdot\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma\left(b-a+\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\Gamma(a)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a+1)}$$

$$(2)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\cdots\cdots}$$

$$= \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\cdots\cdots)}$$

উল্লেখ্য, এ দুটি সূত্রও রামানুজন হার্ডিকে লেখা প্রথম চিঠির সঙ্গে পাঠিয়েছিলেন। এদের সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে হার্ডি বলেছিলেন 'I thought that, as an expert in definite integrals, I could probably prove them and did so though with a good deal of more trouble than I had expected.'

$$(3)\quad \phi(n)=\int_0^\infty \frac{\cos nx}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1}dx \text{ হলে}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin nx}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1}dx=\phi(x)-\frac{1}{2\pi}+\phi\left(\frac{\pi^2}{n}\right)\left(\frac{2\pi^3}{n^3}\right)^{1/2}$$

$$(4)\quad \int_0^\infty |\Gamma(a+ix)|^2\cos 2mx\ dx = \frac{\sqrt{a}}{2}\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)(\operatorname{sech} m)^{2a}$$

(5) $\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi tx}{\cosh \pi x}e^{-n\pi ix^2}dx$, যেখানে n মূলদ ; এই সমাকলনটির মান সসীম পদ সমষ্টিতে নির্ণয় করা যায়। এর অনুসিদ্ধান্ত রূপে কিছু সমাকলের মান ক্রোনেকার (Kronecker) ও হার্ডি আগেই নির্ণয় করেছিলেন। যেমন,

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi x^2}{\cosh\pi x}\cos 2\pi tx \; dx = \frac{1+\sqrt{2}\sin\pi t^2}{2\sqrt{2}\cosh\pi t}$$

(6) $\phi(n) = \int_0^\infty \frac{x\cos n\pi x^2}{e^{2\pi x}-1}dx$ হলে,

$$\phi(0) = \frac{1}{24},\ \phi(1) = \frac{2-\sqrt{2}}{16}, \qquad \phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8\pi},$$

$$\phi\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8-3\sqrt{5}}{32}.$$

(7) $\alpha\beta = \pi$ হলে,

$$\sqrt{\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}dx = \sqrt{\beta}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}dx$$

(8) $\alpha\beta = \pi^2$ হলে,

$$\alpha^{-\frac{1}{4}}\left[1+4\alpha\int_0^\infty \frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right] = \beta^{-\frac{1}{4}}\left[1+4\beta\int_0^\infty \frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right]$$

(9) $$\int_0^x \left(1^{13}+2^{13}+3^{13}+\cdots+x^{13}\right)dx = \frac{1}{14}\left(1^{14}+2^{14}+3^{14}+\cdots+x^{14}\right) - \frac{x}{12}$$

(10) $$\int_0^\infty \frac{\sin 2nx}{x(\cosh\pi x+\cos\pi x)}dx$$

$$= \frac{\pi}{4}-2\left[\frac{e^{-n}\cos n}{\cosh\frac{\pi}{2}}-\frac{e^{-3n}\cos 3n}{3\cosh\frac{3\pi}{2}}+\frac{e^{-5n}\cos 5n}{5\cosh\frac{5\pi}{2}}-\cdots\cdots\right]$$

(11) $$\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{x}dx - \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1}x}{x}dx = \frac{\Pi}{12}\log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

(12) নির্দিষ্ট সমাকলের মান নির্ণয়ে 'Ramanujan's Master Theorem' নামে খ্যাত উপপাদ্যটি হল :

$$\int_0^{\infty} x^{n-1}F(x)dx = \Gamma(n)\phi(-n),$$

যেখানে $F(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\phi(K)(-x)^K}{K!}$, $x = 0$ এর সামীপ্যে (in some neighbourhood of $x = 0$)।

উল্লেখ করা যেতে পারে, মাদ্রাজ বিশ্বদ্যালয় থেকে তিনি যে বৃত্তি পেয়েছিলেন, তার শর্তানুসারে তিনি তিনটি 'quaterly progress reports' জমা দেন। এই রিপোর্টগুলিতে তিনি এই উপপাদ্যের বহুল প্রয়োগ করে নানা ফল পেতে সমর্থ হয়েছিলেন।

14. টাও-অপেক্ষক

মক-থিটা অপেক্ষক (Mock–theta function), উপবৃত্তীয় ও মডিউলার অপেক্ষক (Elliptic and modulur function), জিটা অপেক্ষক (Zeeta function) প্রভৃতি বহু অপেক্ষক নিয়ে রামানুজন নানা স্মরণীয় গবেষণা করেছেন। রামানুজনের টাও অপেক্ষকও (τ – function) কম উল্লেখযোগ্য নয়। τ-অপেক্ষক নিচের মত সংজ্ঞায়িত হয়ঃ

$$\begin{aligned} g(x) &= x\left\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\cdots\right\}^{24} \\ &= x\,\pi_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n).x^n \end{aligned}$$

রামানুজন $n = 30$ পর্যন্ত $\tau(n)$ -এর মান লিপিবদ্ধ করেছেন এবং প্রমাণ করেছেন যে $p = 2, 3, 5, 7, 23$ হলে $\tau(p)$ সংখ্যাটি p দ্বারা বিভাজ্য। আরও দেখিয়েছেন যে, p-এর উল্লিখিত মানের ক্ষেত্রে প্রতিটি স্বাভাবিকসংখ্যা n-এর জন্য $\tau(pn)$ আবার p দ্বারা বিভাজ্য। গাণিতিক চিহ্নে আমরা লিখতে পারি

$$\tau(p) \equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 2, 3, 5, 7, 23$$

এবং $\tau(pn) \equiv 0 \pmod{p}$, $p = 2, 3, 5, 7, 23$

রামানুজনই প্রথম যিনি এই τ -অপেক্ষকের আর্কষণীয় বিভাজ্যতা ধর্মাবলী লক্ষ করেন, যেমন

$$\tau(n) = \sigma_{r}(n) \pmod{691},$$

যেখানে $\sigma_{r}(n) = \Sigma d^{r}$ এবং d হচ্ছে n কে বিভাজ্য করে এমন সংখ্যা এবং সমষ্টি (Σ) সকল d উপর নেওয়া অর্থাৎ '$\tau(n) - \sigma_{r}(n)$' অবশ্যই 691 মৌলিক সংখ্যার দ্বারা বিভাজ্য।

উল্লেখ করা যেতে পারে, 691 মৌলিক সংখ্যাটির উপস্থিতি যেমন এখানে রয়েছে, তেমনি রামানুজনের বারনৌলি সংখ্যা $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ তে আছে। তাই বোধ হয় 691 সংখ্যাটিকে 'রামানুজন মৌলিক সংখ্যা' নামে আখ্যায়িত করা হয়।

15. গাণিতিক রসবোধ

সবাই জানে, রামানুজনের কাছে গণিতই ছিল সবকিছু — সাধনা, ধ্যান-জ্ঞান, ভালোবাসা, অনুভূতির মর্মস্থল। তাঁর কাজের মধ্যে যে রসবোধের অভাব ছিল না, সে উদাহরণ দিতে তিনি ভুলে যান নি। নিচের ঘটনা থেকে তাঁর গাণিতিক রসবোধের গভীরতা বোধহয় মাপা যেতে পারে।

তিনি তাঁর নোটবইতে একটি গাণিতিক সমস্যার কথা উল্লেখ করেছেন। সমস্যাটি হল a, b, c, d, ... এবং p, q, r, ... সংখ্যা সমূহ এমনভাবে নির্ণয় করতে হবে যাতে নিচের দুটি সম্পর্ক (1) এবং (2) এক সঙ্গে সিদ্ধ হয়:

$$a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots = p + q + r + \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

এবং $$a^{a}.b^{b}.c^{c}.d^{d}\ldots\ldots\ldots = p^{p}.q^{q}.r^{r}\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

সমস্যা দেখে মনে হওয়া স্বাভাবিক, এটি বেশ কঠিন এক গাণিতিক সমস্যা; কারণ, একই সঙ্গে (1) এবং (2) সম্পর্ক দুটি সিদ্ধ হতে হবে। রামানুজন বলেছেন এটা একদম কঠিন কাজ নয়। (2) সম্পর্ক সিদ্ধ করে এমন সব সংখ্যা সহজেই পাওয়া যাবে। যেমন, $2^{2}.6^{6} = 3^{3}.3^{3}.4^{4}$।

এই রকম ধারণা রামানুজনের কাছে সহজ মনে হলেও অন্যের কাছেও কি

সহজ? যাই হোক, এই সমাধান কিন্তু (1) সম্পর্ককে সিদ্ধ করে না। কারণ $(2+6) \neq (3+3+4)$। রামানুজন বললেন, এ অসুবিধা দূর করা কোন ব্যাপারই না; প্রয়োজন মতো 1^1 — এরকম দুটি উৎপাদক বাম পক্ষে গুণ করে দিলেই চলবে। কারণ এতে (2) সম্পর্ক কোনো রকমভাবে প্রভাবিত হবে না, কিন্তু (1) নং সম্পর্ক সিদ্ধ হবে। অর্থাৎ আমরা পাব

$$1^1 1^1 2^2 6^6 = 3^3 3^3 4^4 \quad \text{যেখানে} \quad 1+1+2+6 = 3+3+4.$$

এরকম আরো উদাহরণ তাঁর নোটবইতে পাওয়া যায়। এখানে আরো দুটি এ ধরনের উদাহরণ তুলে ধরা যাক।

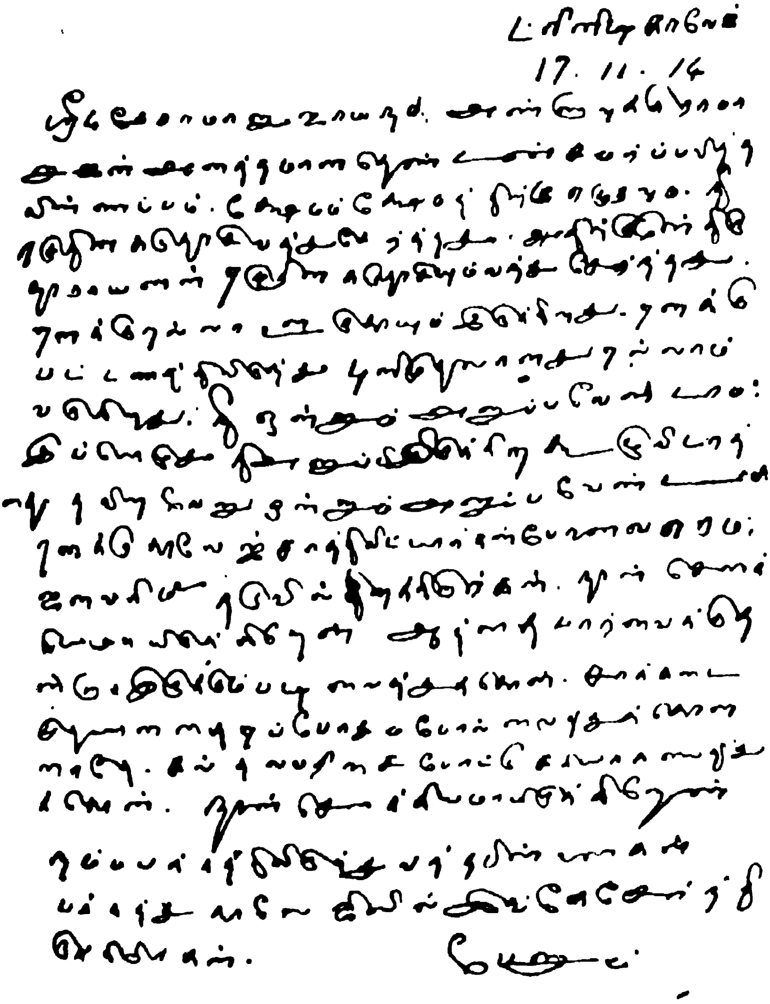
(i) $1^1 3^3 12^{12} 20^{20} = 5^5 15^{15} 16^{16}$, যেখানে $1+3+12+20 = 5+15+16$

এবং (ii) $1^1 4^4 20^{20} 30^{30} = 6^6 24^{24} 25^{25}$, যেখানে $1+4+20+30 = 6+24+25$

সত্যিই রামানুজনের গণিতচর্চা ও গণিত সাধনার মধ্যে অনেক মণি-মুক্তা লুকিয়ে আছে যার উজ্জ্বলতায় আমাদের চোখ ঝলসে যায় কিন্তু আকৃষ্ট করে প্রচণ্ডভাবে। সর্বোপরি তাঁর গণিত বিমুগ্ধতা সবার কাছে গণিতকে তুলে ধরে এক আনন্দ ও ভালোবাসার বস্তু হিসাবে। রামানুজনের গাণিতিক কাজের ব্যাপ্তি বিশাল, তাঁর গণিত মানসিকতার তীক্ষ্ণতা ও সূক্ষ্মতা তাঁকে সত্যিই গণিত জগতের বিস্ময় হিসাবে প্রতিষ্ঠিত করে। সাধারণ আমরা তাঁর গণিত গবেষণার কাছে কতটাই বা যেতে পারি। তিনি গণিত জগতের প্রোজ্জ্বল নক্ষত্র। তাঁর কীর্তির মহিমা ভারতীয় হিসাবে আমাদের মাথাকে উঁচুতে তুলে ধরে।

ধন্য গণিত-বিস্ময় রামানুজন! গণিতের জন্মভূমি ভারতবর্ষ তোমার মতো সন্তানের জন্য গর্বিত — আর্যভট, ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করের সাথেই তোমার স্থান। বিশ্বের সর্বকালের সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞদের মধ্যেও তুমি একজন। তোমাকে সহস্র প্রণাম এবং গভীর শ্রদ্ধা-সম্মান মিশ্রিত ভক্তির অঞ্জলি।

পরিশিষ্ট


17. 11. 14

তামিল ভাষায় বাবাকে লেখা রামানুজনের চিঠি যার ইংরাজি অনুবাদ 193 পৃষ্ঠায় আছে

কুলপঞ্জী

মদবূশি কুপ্পস্বামী আয়োঙ্গার + রঙ্গনায়কী আম্মল (রঙ্গম্মল)

↓

কুপ্পুস্বামী শ্রীনিবাস আয়েঙ্গার

\+

কোমলতাম্মল

↓

- রামানুজন (চিন্নাস্বামী) [জন্ম: 22.12.1887 মৃত্যু: 26.4.1920] + জানকী আম্মল (জন্ম: 21.3.1899, মৃত্যু: 13.4.1994) [সন্তানহীন]
  - ↓ (জানকীর দত্তক পুত্র) নারায়ণ + বৈদেহী
- সদগোপান (বাল্যে মৃত)
- অম্বুজাবল্লী (কন্যা) (বাল্যে মৃত)
- সেশন (বাল্যে মৃত)
- লক্ষ্মী নরসিংহ [জন্ম: 18.4.1898, মৃত্যু: 1946] + সৌন্দরাভল্লী (দ্বিতীয় পত্নী)
  - ↓ নামগিরি (কন্যা) + শেষাদ্রি
- থিরুনারায়ণ [জন্ম. 19 4 1905, মৃত্যু: 9.4.1978] + চেন্বাগাবল্লী
  - ↓
    - টি বিজয় রাঘবন + মারাগাথাম্মল
      - ↓ শান্তা বদ্রিনাথ (কন্যা), শ্রীকান্তা, শ্রীশিভানা রামানুজন, বাসুদেবন
    - পার্থ সারথি + গীতা লক্ষ্মী
      - ↓ নিত্যকল্যাণী (কন্যা), শ্রীনাথ, সুনাতা (কন্যা), গোপীনাথ
    - টি আনন্দ নারায়ণ + সুলোচনা
      - ↓ বিদ্যাশ্রী (কন্যা), সান্ত্বনা কৃষ্ণান

[থিরুনারয়েণের জীবিত পুত্রদেরই নাম উল্লেখ করা হল। 'কন্যা' লেখা না থাকলে পুত্র হিসাবে ধরতে হবে, লক্ষ্মী নরসিংহের প্রথম পত্নী ছিলেন ধুসি পংমল]

[সৌজন্যে : The Mathematics Teacher, Vol 34, Issue I, Year 1998]

এক নজরে রামানুজন

1887	
[ডিসেম্বর, 22]	— রামানুজনের জন্ম [ইরোডে মাতামহের বাড়িতে]
1892	
[অক্টোবর, 1]	— বিদ্যালয় জীবনের শুরু [পিয়াল স্কুলে প্রথম যাবার মধ্য দিয়ে]
1894	
	— কুম্ভকোনমে কঙ্গায়ন প্রাথমিক বিদ্যালয়ে ভর্তি
1897	
	— শেষ প্রাথমিক পরীক্ষায় বসা
1898	
	— শেষ প্রাথমিক পরীক্ষায় তাঞ্জোর জেলার পরীক্ষার্থীদের মধ্যে প্রথম হয়ে উত্তীর্ণ হওয়া ও জানুয়ারি মাসে কুম্ভকোনম টাউন হাইস্কুলে ভর্তি
1903	
	— কে রঙ্গনাথ রাও পুরস্কারপ্রাপ্তি [শেষ বার্ষিক পরীক্ষায় গণিতে কৃতিত্বের জন্য]
	— স্কুলব্রিজ কারের লেখা 'A synopsis of elementary results in Pure and Applied Mathematics' নামক বইটি হাতে পাওয়া
	— মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের ম্যাট্রিকুলেশন পরীক্ষায় বসা
1904	
	— ম্যাট্রিকুলেশন পরীক্ষায় গণিত ও ইংরাজিতে বিশেষ কৃতিত্বের জন্য জুনিয়ার সুব্রমনিয়ান বৃত্তিলাভ ও কুম্ভকোনমের সরকারি কলেজে ভর্তি
1905	
[জানুয়ারি]	— ইংরাজিতে কম নম্বর পাবার জন্য এফ এ ক্লাশের দ্বিতীয় বর্ষে উন্নীত হবার ব্যর্থতা

[আগস্ট]	—	ভিজাগাপত্তমে অন্তর্ধান
	—	কম উপস্থিতির জন্য কুম্ভকোনম সরকারি কলেজে প্রথম বর্ষের বার্ষিক পরীক্ষায় বসার জন্য যোগ্যতা লাভে ব্যর্থতা
1906		
	—	মাদ্রাজে পাচাইআপ্পা কলেজে এফ এ ক্লাশে ভর্তি
1907		
	—	প্রাইভেট পরীক্ষার্থী হিসাবে এফ এ পরীক্ষায় বসা
	—	গণিতে 100 মধ্যে 100 পেয়েও অন্য বিষয়ে প্রয়োজনীয় নম্বর না পাওয়ায় এফ এ পরীক্ষায় ফেল
1908		
	—	রঙ্গস্বামী আয়েঙ্গার ও রঙ্গনায়কীর চতুর্থ কন্যা নয় বছরের জানকীর সঙ্গে রামানুজনের বিবাহের কথা স্থির
1909		
[জুলাই, 14]	—	জানকী দেবীর সঙ্গে রামানুজনের বিবাহ
1910		
[গোড়ার দিকে]	—	তিরুকৌলুরে ডেপুটি কালেক্টর ভি রামস্বামী আয়ারের সঙ্গে চাকরির উদ্দেশ্যে সাক্ষাৎ
[পরে]	—	সেশু আয়ারের চেষ্টায় প্রেসিডেন্সির অ্যাকাউন্টেন্ট জেনারেলের অফিসে অস্থায়ী চাকরি লাভ
[কয়েকমাস পরে]	—	অসুস্থ হয়ে বন্ধু রামকৃষ্ণ আয়ারের কাছে নোটবই গচ্ছিত রেখে মাদ্রাজ থেকে কুম্ভকোনমে আসা
[ডিসেম্বর]	—	সেশু আয়ারের সুপারিশপত্র নিয়ে নেরোল জেলার কালেকটর দেওয়ান বাহাদুর আর রামচন্দ্র রাও-এর সঙ্গে সাক্ষাৎ
1911		
[একদম গোড়ার দিকে]	- -	রামানুজনকে রামচন্দ্র রাও-এর মাসিক পঁচিশ টাকা হারে অনুদান প্রদান
[ফেব্রুয়ারি]	—	ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে রামানুজনের গবেষণালব্ধ গাণিতিক সমস্যা প্রকাশ

[ডিসেম্বর] — ইন্ডিয়ান ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির জার্নালে 'Some Properties of Bernoulli Numbers' শীর্ষক প্রথম গবেষণাপত্র প্রকাশ

1912

— কুম্ভকোনমে পতিগৃহে জানকীর আগমন (বয়ঃপ্রাপ্ত হয়ে)

[জানুয়ারি, 12 থেকে ফেব্রুয়ারি, 21] অ্যাকাউন্টেন্ট জেনারেলের অফিসে কর্মরত

[ফেব্রুয়ারি, 9] মাদ্রাজ পোর্ট ট্রাস্টে চাকরির জন্য আবেদন

[ফেব্রুয়ারি, 25] পোর্ট ট্রাস্টের অ্যাকাউন্ট সেকশনে পঁচিশ টাকার মাস মাহিনার চাকরির জন্য নির্বাচন ও নিযুক্তি পত্র প্রদান

[মার্চ, 1] — পোর্ট ট্রাস্টে কেরানির কাজে যোগদান

[পরবর্তী কালে] — পোর্ট ট্রাস্টের চেয়ারম্যান স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং-এর স্নেহ ও আনুকূল্য লাভ এবং ম্যানেজার এস নারায়ণ আয়ারের সঙ্গে আত্মিক যোগাযোগ স্থাপন

[কয়েকমাস পরে] — ত্রিপলিক্যানের সামার হাউসের বাসস্থান পরিবর্তন করে জর্জ টাউনের শৈব মুদালি স্ট্রিটে আগমন (এখানে দিদিমা, মা, স্ত্রী এই তিন প্রজন্মের সঙ্গে অবস্থান)

[ডিসেম্বর, 3 ; ডিসেম্বর, 7] — রামানুজনের কাজের মূল্যায়নের জন্য অনুরোধ করে লেখার চিঠির উত্তরে গ্রাহামকে লেখা হিলের চিঠি (মূল্যায়নের ব্যাপারে নীরব থেকে রামানুজনকে ব্রোমউইচের বই পড়ার জন্য হিলের উপদেশ)

1913

[জানুয়ারি, 16] — অধ্যাপক জি এইচ হার্ডিকে প্রথম চিঠি লেখা (এগারো পাতার চিঠিতে ছিল অনেক সূত্র ও উপপাদ্য)

[জানুয়ারির শেষে] — হার্ডির দ্বারা রামানুজনের ঐতিহাসিক চিঠি প্রাপ্তি ও কেমব্রিজে গণিত জগতে আলোড়ন

[ফেব্রুয়ারি, 8] — রামানুজনের প্রথম চিঠির উত্তরে হার্ডির চিঠি লেখা

[ফেব্রুয়ারি, 25] — ডঃ গিলবার্ট ওয়াকারের মাদ্রাজ আগমন (জোয়ার-ভাঁটা সংক্রান্ত গবেষণার কাজ পরিদর্শন উপলক্ষে)

[ফেব্রুয়ারি, 26] — রামানুজনের জন্য বৃত্তির সুপারিশ করে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়কে ডঃ ওয়াকারের চিঠি

[ফেব্রুয়ারি, 27] — হার্ডিকে রামানুজনের দ্বিতীয় চিঠি লেখা [চিঠির সঙ্গে আরো উপপাদ্য ; প্রথম ও দ্বিতীয় চিঠিতে সব মিলিয়ে প্রায় 120টি উপপাদ্য প্রেরণ]

[মার্চ, 19] — বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতের বোর্ড অফ স্টাডিজের মিটিং-এ রামানুজনের গবেষণার জন্য বৃত্তি প্রদানের অনুমোদন

[মার্চ, 25] — দু' বছরের জন্য মাসিক 75 টাকা হারে বৃত্তির অনুমোদন সংক্রান্ত চিঠি গণিতের বোর্ড অফ স্টাডিজ থেকে বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে লেখা

[এপ্রিল, 5] — গবেষণার জন্য বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেটের বৃত্তির অনুমোদনকে সম্মতি দিয়ে সরকার কর্তৃক চূড়ান্ত অনুমোদনের আদেশ

[এপ্রিল, 9] — বৃত্তি অনুমোদনের কথা জানানোর জন্য রামানুজনকে রেজিস্ট্রারের চিঠি

[এপ্রিল, 17] — গবেষণার জন্য বৃত্তি পাবার সংবাদ রামানুজনের দ্বারা হার্ডিকে প্রেরণা

[মে, 1] — পোর্ট ট্রাস্ট অফিস থেকে বেতন ছাড়া দু'বছরের ছুটি মঞ্জুর ও মাদ্রাজে বিশ্ববিদ্যালয়ে গবেষক হিসাবে যোগদান

[আগস্ট, 5] — মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ে গবেষণার অগ্রগতির প্রথম ত্রৈমাসিক প্রতিবেদন পেশ

[নভেম্বর, 7] — গবেষণার অগ্রগতির দ্বিতীয় ত্রৈমাসিক প্রতিবেদন বিশ্ববিদ্যালয়ে পেশ

1914

[জানুয়ারির প্রথমে] — আমন্ত্রিত অধ্যাপক হিসাবে ই এইচ নেভিলের মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ে আগমন, রামানুজনের সঙ্গে সাক্ষাৎ এবং রামানুজনকে ইংল্যান্ডে নিয়ে যাবার প্রয়াস

[জানুয়ারি, 28]	—	কেমব্রিজে রামানুজনকে পাঠানোর জন্য বৃত্তির অনুকূলে বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে নেভিলের চিঠি
[জানুয়ারি, 29]	—	রামানুজনের বিদেশ যাত্রার সুপারিশ করে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে অধ্যাপক লিটলহেইলসের চিঠি
[ফেব্রুয়ারি, 5]	—	রামানুজনের বিদেশযাত্রার জন্য বৃত্তির অনুমোদনের জন্য গভর্নরের সচিবকে স্যার ফ্রান্সিস স্প্রিং-এর চিঠি
[ফেব্রুয়ারি, 12]	—	সরকারের শিক্ষা-বিভাগ থেকে সিন্ডিকেট কর্তৃক বৃত্তি অনুমোদনের চূড়ান্ত অনুমোদন [অর্ডার নঃ 182]
[মার্চ, 17]	—	নেভাসা জাহাজ যোগে ইংল্যান্ড যাত্রা
[এপ্রিল, 14]	—	লন্ডনের ডকে রামানুজনের অবতরণ [নেভিল ও তাঁর ভাইয়ের অভ্যর্থনা]
	—	ভারতীয় ছাত্রদের জন্য ক্রোমওয়েল রোডস্থিত অতিথিশালায় অবস্থান
[এপ্রিল, 18]	—	নেভিলের বাড়িতে রামানুজনের গমন এবং সাময়িক ভাবে সেখানে অবস্থান
[জুনের প্রথম]	—	হোয়েওয়েল কোর্টে অবস্থিত ট্রিনিটি কলেজের ছাত্রাবাসে আগমন ও অবস্থান
[জুন, 11]	—	রামানুজনের নোটবইয়ের কিছু অংশ সম্পাদনা করে প্রস্তুত প্রবন্ধ লন্ডন ম্যাথম্যাটিক্যাল সোসাইটির দ্বিতীয় বৃহস্পতিবারের সান্ধ্য অধিবেশন হার্ডি কর্তৃক পাঠ
[আগস্ট]	—	দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধে ইংল্যান্ডের যোগদান এবং ফল স্বরূপ যুদ্ধে বিশ্ববিদ্যালয় ও কলেজের নানা ব্যক্তির অংশগ্রহণ
[পরে]	—	অধ্যাপক লিটলউডের যুদ্ধে অংশগ্রহণ ও বিশ্ববিদ্যালয়ে শিক্ষা পরিবেশের অবনতি ; একমাত্র হার্ডির সাহচর্যের উপর রামানুজনের নির্ভর

[1914 সালে রামানুজনের একটি মাত্র গবেষণাপত্র প্রকাশিত]

1915

[নভেম্বর, 8] — রামানুজনের বৃত্তির সময় বৃদ্ধির সুপারিশ করে টিউটর বার্নেসের মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে চিঠি

[ডিসেম্বর, 7] — মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেট কর্তৃক আরো এক বছরের জন্য বৃত্তির অনুমোদন

[1915 সালে রামানুজনের মোট ন'টি গবেষণাপত্র প্রকাশিত]

1916

[জানুয়ারি, 17] — সিন্ডিকেটের দ্বারা আরো এক বছরের বৃত্তির অনুমোদনে সরকারের সম্মতি প্রদান

[মার্চ, 18] — কেমব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয় থেকে স্নাতক ডিগ্রি লাভ [অতিমাত্রিক যৌগিক সংখ্যা সংক্রান্ত গবেষণার জন্য]

[অক্টোবর, 18] — পোর্ট ট্রাস্ট অফিস থেকে বিনা বেতনে আরো এক বছরের ছুটির মঞ্জুর

[অক্টোবর, 30] — কেমব্রিজ ফিলোজফিক্যাল সোসাইটিতে রামানুজনের দিওফান্তীয় সমীকরণ সংক্রান্ত প্রবন্ধটি হার্ডি কর্তৃক উপস্থাপন

[1916 সালে রামানুজনের মোট তিনটি গবেষণাপত্র প্রকাশিত]

1917

[জানুয়ারি, 18] — লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটিতে হার্ডি কর্তৃক রামানুজন ও হার্ডির যৌথ গবেষণাপত্র পাঠ

[মার্চ, 6] — মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেট কর্তৃক বৃত্তির সময়কে আরো এক বছর বৃদ্ধির অনুমোদন [31.3.1918 পর্যন্ত]

[মার্চ, 13] — বৃত্তির সময় বৃদ্ধিতে সিন্ডিকেটের অনুমোদনে সরকারের সম্মতি প্রদান

[পরবর্তী সময়ে] — রামানজনের অসুস্থতার শুরু

[মে মাস থেকে পাঁচমাস] — কেমব্রিজের 'নার্সিং হোস্টেলে' অবস্থান

[অক্টোবরের দু'তিন সপ্তাহ]	—	সামারসেটের 'মেনডিপ হিলস্' নামক স্যানেটোরিয়ামে অবস্থান
[নভেম্বর]	—	ডার্বিশায়ারের 'ম্যাটলক হাউস' নামক স্যানেটোরিয়ামে ভর্তি
[ডিসেম্বর, 6]	—	লন্ডন ম্যাথেম্যাটিক্যাল সোসাইটির সদস্য হিসাবে নির্বাচন
[ডিসেম্বর, 18]	—	রামানুজনের এফ আর এস-এর জন্য তেরোজনের স্বাক্ষর করা আবেদন পত্র রয়েল সোসাইটিতে জমা

[1917 সালে রামানুজনের মোট সাতটি গবেষণাপত্র প্রকাশিত, এর মধ্যে পাঁচটি গবেষণাপত্র হার্ডির সহযোগে যৌথভাবে]

1918

[ফেব্রুয়ারি, 18]	—	কেমব্রিজের ফিলোজফিক্যাল সোসাইটিতে ফেলো হিসাবে রামানুজনের নির্বাচন
[ফেব্রুয়ারি, 28]	—	রয়েল সোসাইটির মিটিং-এ রামানুজনরে এফ আর এস হিসাবে নির্বাচন
[মার্চ]	—	মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের সিন্ডিকেটের এবং পরে সরকার কর্তৃক [31.3.1919 পর্যন্ত] এক বছরের বৃত্তির অনুমোদন
[জুন]	—	লন্ডনের 'ফিৎজরয় হাউসে' ভর্তি
[অক্টোবর, 10]	—	রামানুজনের ট্রিনিটি কলেজের ফেলো হিসাবে নির্বাচন [ছয় বছরের জন্য কোনো শর্ত ছাড়া বার্ষিক 250 পাউন্ড হিসাবে ফেলোশিপ পাবার অধিকার]
[ডিসেম্বর, 9]	—	রামানুজনকে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রার ডেউসবারির চিঠি [1919 সালের পয়লা এপ্রিল থেকে পাঁচবছরের জন্য বার্ষিক 250 পাউন্ডের বৃত্তির অনুমোদনের কথা জানিয়ে]
[ডিসেম্বরের শেষে]	—	পুটনির 'কলিনেট হাউসে' ভর্তি

[1918 সালে মোট চারটি গবেষণাপত্র প্রকাশিত, যার মধ্যে দুটি হার্ডির সহযোগে যৌথভাবে]

1919

[ফেব্রুয়ারি, 27]	—	নাগোয়া জাহাজ যোগে ইংল্যান্ড থেকে স্বদেশের উদ্দেশ্যে যাত্রা
[মার্চ, 27]	—	বোম্বাই বন্দরে অবতরণ [স্বাগত জানাতে উপস্থিত মা ও ভাই লক্ষ্মী নরসিংহ, কিন্তু অনুপস্থিত স্ত্রী জানকী]
[এপ্রিল, 2]	—	মাদ্রাজে আগমন ও 'সত্যাগ্রহ' নামক বাংলোতে অবস্থান
[পরে]	—	'ভেঙ্কট ভিলাস' নামক বাংলোতে গমন এবং সেখানে তিনমাস অবস্থান
[এপ্রিল, 6]	—	ভাইকে সঙ্গে নিয়ে জানকীর আগমন ও রামানুজনের সঙ্গে পাঁচ বছর পরে সাক্ষাৎ
[জুলাই থেকে সেপ্টেম্বর]	—	কাবেরী নদীর তীরে কোড়ুমুডি গ্রামে অবস্থান
[সেপ্টেম্বর, 3]	—	কুম্ভকোনমের দিকে যাত্রা

[1919 সালে রামানুজনের মোট চারটি গবেষণাপত্র প্রকাশিত]

1920

[জানুয়ারির প্রথম দিকে]	—	মাদ্রাজে আগমন এবং চেতপাটে অবস্থান [প্রথমে 'কুডাসিয়া,' পরে 'ক্রাইন্যান্ট' এবং শেষে 'গোমেত্র' নামক বাড়িতে অবস্থান]
[জানুয়ারি, 12]	—	মক-থিটা অপেক্ষকের আবিষ্কারের কথা জানিয়ে হার্ডিকে চিঠি লেখা
[এপ্রিল, 26]	—	32 বছর 4 মাস 4 দিন বয়সে অমৃতলোকে যাত্রা

[1920 সালে রামানুজনের তিনটি এবং 1921 সালে একটি গবেষণাপত্র প্রকাশিত]

গবেষণা-পত্রসমূহের তালিকা

রামানুজনের লেখা প্রকাশিত গবেষণাপত্র সমূহ

[JIMS : *Journal of the Indian Mathematical Society*
QJM : *Quarterly Journal of Mathematics*
MM : *Messenger of Mathematics*
PLMS : *Proceedings of London Mathematical Society*
CPS : *Cambridge Philosophical Society*]

1. Some Properties of Bernoulli's numbers :
JIMS, 3 (1911), 219–234.
2. On Question 330 of Prof. Sanjana :
JIMS, 4 (1912), 59–61.
3. Note on a set of simultaneous equations :
JIMS, 4 (1913), 94–96.
4. Irregular numbers :
JIMS, 5 (1913), 105–106.
5. Squaring the circle :
JIMS, 5 (1913), 132.
6. Modular equations and approximations to π :
QJM, 45 (1914), 350–372.
7. On the integral $\int_0^x \frac{\tan^{-1} t}{t} dt$
JIMS, 7 (1915), 93–96.
8. On the number of divisors of a number :
JIMS, 7 (1915), 131–133.
9. On the sum of the square roots of the first *n* natural numbers :
JIMS, 7 (1915), 173–174.
10. On the product $\Pi_{n=0}^{n=\infty}\left[1+\left(\frac{x}{a+nd}\right)^3\right]$
JIMS, 7 (1915), 209–211.
11. Some definite integrals :
MM, 7 (1915), 10–18.

12. Some definite integrals connected with Gauss's sums
MM, 44 (1915), 75–85

13. Summation of certain series.
MM, 44 (1915), 157–160

14. New expressions for Riemann's functions $\xi(s)$ and $\Sigma(t)$:
QJM, 46 (1915), 253–260

15. Highly composite numbers.
PLMS, 2, 14 (1915), 347–409.

16. On certain infinite series :
MM, 45 (1916), 11–15.

17. Some formulae in the analytic theory of numbers
MM, 45 (1916), 81–4

18. On certain arithmetical functions
Transactions of the CPS, 22, No 9 (1916), 159–184

19. A series for Euler's constant γ :
MM, 46 (1917), 73–80.

20. On the expression of a number in the form $ax^2+by^2+cz^2+du^2$:
Proceeding of the CPS, 19 (1917), 11–12.

21. On certain trigonometrical sums and their application in the theory of numbers :
Transactions of the CPS, 22, No. 13 (1918), 259–276.

22. Some definite integrals :
PLMS, 2, 17 (1918), Records for 17 Jan. 1918.

23. Some definite integrals :
JIMS, 11 (1919), 81–87.

24. A proof of Bertrand's postulate :
JIMS, 11 (1919), 181–82.

25. Some properties of p(n), the number of partitions of n :
Proceeding of the CPS, 19 (1919), 214–216.

26. Proof of certain identities of combinatory analysis.
Proceeding of the CPS, 19 (1919), 214–216

27. A class of definite integrals :
QJM. 48 (1920), 294–210.

28. Congruence properties of partitions :
PLMS, 2, 18 (1920). Records for 13 March 1919.

29. Algebraic relations between certain infinite products :
PLMS, 2, 18 (1920), Records for 13 March 1919.

30. Congruence properties of partitions :
Mathematische Zeitschrift, 9 (1921), 147–153.

হার্ডির সহযোগে যৌথ গবেষণাপত্র

31. Une formulae asymptotique pour le nombre des partitions de *n* : Comptes Rendus. 2 Jan. 1917.

32. Proof that almost all numbers *n* are composed of about log log *n* prime factors :
PLMS. 2. 16 (1917), Records for 14 Dec. 1916.

33. Asymptotic formulae in combinatory analysis :
PLMS. 2, 16 (1917), Records for 1 March 1917.

34. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types : PLMS, 2, 16 (1917). 112–132.

35. The normal number of prime factors of a number *n* :
QJM, 48 (1917). 76–92.

36. Asymptotic formulae in combinatory analysis :
PLMS, 2 , 17 (1918), 75–115.

37. On the coefficients in the expansion of certain modular functions :
Proceeding of the Royal Society. A. 95 (1918), 144–155.

[সৌজন্যে : *Bulletin of the Tripura Mathematical Society, Ramanujan's Birth Centenary Commemorating Volume*]

কিছু বিশেষ চিঠি ও নথিপত্র

পোর্ট ট্রাস্টে চাকরির জন্য রামানুজনের দরখাস্ত

From
S. Ramanujan
7, Summer House
Triplicane

Triplicane
9th February 1912

To
The Chief Accountant
Port Trust
Madras

Sir,

I understand there is a clerkship vacant in your office, and I beg to apply for the same. I have passed the Matriculation Examination and studied up to the F.A. but was prevented from pursuing my studies further owing to several untoward circumstances. I have, however, been devoting all my time to Mathematics and developing the subject. I can say I am quite confident I can do justice to my work if I am appointed to the post. I therefore beg to request that you will be good enough to confer the appointment on me.

I beg to remain,
Sir,
Your most obedient Servant
S. Ramanujan

[রামানুজন যখন দরখাস্ত করেন তখন তিনি ত্রিপলিক্যানের সামারহাউসে বাস করতেন।]

◆◆◆

Triplicane
9th February 1912

From

S. Ramanujan
7. Summer House
Triplicane.

To

The Chief Accountant
Port Trust
Madras

Sir,

I understand there is a clerkship vacant in your office and I beg to apply for the same. I have passed the Matriculation Examination and studied up to the F.A. but was prevented from pursuing my studies further owing to several untoward circumstances. I have, however, been devoting all my time to Mathematics and developing the subject. I can say I am quite confident I can do justice to my work if I am appointed to the post. I therefore beg to request that you will be good enough to confer the appointment on me

I beg to remain,
Sir,
your most obedient Servant
S Ramanujan

In page 36 it is stated that "the no. of prime nos. less than $x = \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \rho(x)$ where the precise order of $\rho(x)$ has not yet been determined."

The precise order itself is not sufficient to find the value of $\rho(x)$. Even if it is known that $\frac{\rho(x)}{\phi(x)} = 1$ when x becomes infinite, $\phi(x)$ being a known function of x, $\rho(x)$ cannot be supposed to have been found with sufficient accuracy. For example $\left(x + \frac{x}{\log x}\right)/x = 1$ when x becomes infinite, yet the difference between $x + \frac{x}{\log x}$ and x is very great.

From the forms of $\rho(x)$ given on page 53, viz $O\left\{\frac{x}{(\log x)^a}\right\}$, $O(xe^{-a\sqrt{\log x}})$, $O(\sqrt{x})$, &c it appears that from particular numerical values the forms have been guessed.

Even in regular functions it is difficult to have an idea of the form from the numerical values. In such a complicated function as $\rho(x)$ it is difficult to have an idea even for large values of $\log x$. For example even if we give billions for x, $\rho(x)$ is very difficult to be found.

I have observed that $\rho(e^{2\pi x})$ is of such a nature that its value is very small when x lies between 0 and 3 (its value is less than a few hundreds when $x = 3$) and rapidly increases when x is greater than 3.

I have found a function which exactly represents the no. of prime nos. less than x, 'exactly' in the sense that the difference between the function and the actual no. of primes is generally 0 or some small finite value even when x becomes infinite.

IX Theorems on Continued Fractions.

A few examples are:—

(1) $\frac{4}{x+}\frac{1^2}{2x+}\frac{3^2}{2x+}\frac{5^2}{2x+}\frac{7^2}{2x+\&c} = \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+3}{4}\right)}\right\}^2$

(2) If $P = \frac{\Gamma\left(\frac{x+m+n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x-m+n+1}{4}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{x+m-n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x-m-n+1}{4}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{x-m+n+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+m+n+3}{4}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{x-m-n+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+m-n+3}{4}\right)}$, then

$$\frac{1-P}{1+P} = \frac{m}{x+}\frac{n^2-1^2}{3x+}\frac{m^2-2^2}{5x+}\frac{n^2-3^2}{7x+}\frac{m^2-4^2}{9x+\&c}$$

(3) If $z = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2 x^2 + \&c$

and $y = \pi\,\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2(1-x)+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2(1-x)^2+\&c}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2x^2+\&c}$, then

$$\frac{1}{(1+a^2)\cosh y} + \frac{1}{(1+9a^2)\cosh 3y} + \frac{1}{(1+25a^2)\cosh 5y} + \&c$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{z\sqrt{x}}{1+}\frac{(az)^2}{1+}\frac{(1^2+a^2)z^2x}{1+}\frac{(2az)^2}{1+}\frac{(3^2+a^2)z^2x}{1+\&c}$$

a being any quantity

(4) If $u = \frac{x}{1+}\frac{x^5}{1+}\frac{x^{10}}{1+}\frac{x^{15}}{1+}\frac{x^{20}}{1+\&c}$

and $v = \frac{\sqrt[5]{x}}{1+}\frac{x}{1+}\frac{x^2}{1+}\frac{x^3}{1+\&c}$

then $v^5 = u\,\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}$

(5) $\frac{1}{1+}\frac{e^{-2\pi}}{1+}\frac{e^{-4\pi}}{1+}\frac{e^{-6\pi}}{1+\&c} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{2\pi}}$

(6) $\frac{1}{1-}\frac{e^{-\pi}}{1+}\frac{e^{-2\pi}}{1-}\frac{e^{-3\pi}}{1+\&c} = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{\pi}}$

(7) $\frac{1}{1+}\frac{e^{-\pi\sqrt{n}}}{1+}\frac{e^{-2\pi\sqrt{n}}}{1+}\frac{e^{-3\pi\sqrt{n}}}{1+\&c}$ can be exactly found if n be any positive rational quantity

হার্ডিকে লেখা প্রথম চিঠির কিছু অংশ

হার্ডিকে লেখা রামানুজনের প্রথম চিঠি

16 January 1913
Madras

Dear Sir,

I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras on a salary of only £20 per annum. I am now about 23 years of age. I have had no University education but I have undergone the ordinary school course. After leaving school I have been employing the spare time at my disposal to work at Mathematics. I have not trodden through the conventional regular course which is followed in a University course, but I am striking out a new path for myself. I have made a special investigation of divergent series in general and the results I get are termed by the local mathematicians as "startling".

Just as in elementary mathematics you give a meaning to a^n when n is negative and fractional to conform to the law which holds when n is a positive integer, similarly the whole of my investigations proceed on giving a meaning to Eulerian Second Integral for all values of n. My friends who have gone through the regular course of University education tell me that $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx = \Gamma(n)$ is true only when n is positive. They say that this integral relation is not true when n is negative. Supposing this is true only for positive values of n and also supposing the definition $n\Gamma(n)=\Gamma(n+1)$ to be universally true, I have ginen meanings to these integrals and under the conditions I state the integral is true for all values of n negative and fractional. My whole investigations are based upon this and I have been developing this to a remarkable extent so much so that the local mathematicians are not able to understand me in my higher flights.

Very recently I came across a tract published by you styled **Orders of Infinity** in page 36 of which I find a statement that no definite expression has been as yet found for the number of prime numbers less than any given number. I have found an expression which very nearly approximates to the real result, the error being negligible. I would request you to go through the enclosed papers. Being poor, if you are convinced that there is anything of value I would like to have my theorems published. I have not given the actual investigations nor the expressions that I get but I have indicated the lines on which I proceed. Being inexperienced I would very highly value any advice you give me. Requesting to be excused for the trouble I give you.

I remain, Dear Sir, Yours truly,
S. Ramanujan

P.S. My address is S. Ramanujan, Clerk Accounts Department, Port Trust, Madras, India.

[অধ্যাপক জি এইচ হার্ডিকে লেখা এই প্রথম চিঠির সঙ্গে রামানুজন তাঁর গবেষণালব্ধ কিছু গাণিতিক ফলও পাঠিয়েছিলেন, যাদের কোনো ব্যাখ্যা ছিলনা।]

◆ ◆ ◆

রামানুজনের চিঠির উত্তরে হার্ডির চিঠি

8 February 1913
Trinity College, Cambridge

Dear Sir,

I was exceedingly interested by your letter and by the theorems which you state. You will however understand that, before I can judge properly of the value of what you have done, it is essential that I should see proofs of some of your assertions.

Your results seem to me to fall into roughly 3 classes :

(1) there are a number of results which are already known, or are easily deducible from known theorems;

(2) there are results which, so far as I know, are new and interesting, but interesting rather from their curiosity and apparent difficulty than their importance;

(3) there are results which appear to be new and important, but in which almost everything depends on the precise rigour of the methods of proof which you have used.

....

I hope very much that you will send me as quickly as possible at any rate a few of your proofs, and follow this more at your leisure by a more detailed account of your work on primes and divergent series. It seems to me quite likely that you have done a good deal of work worth publication; and, if you can produce satisfactory demonstrations, I should be very glad to do what I can to secure it.

I have said nothing about some of your results—notably those about elliptic functions. I have not got them to refer to, as I handed them to another mathematician more expert than I in this special subject.

Hoping to hear from you again as soon as possible.

I am
Yours very truly,
G. H. Hardy

[এখানে চিঠিটির অংশ বিশেষ আছে। চিঠিতে রামানুজনের পাঠানো গাণিতিক কিছু কিছু ফল সম্বন্ধে আলোচনা সহ মন্তব্য ছিল। অন্য গণিতজ্ঞ বলতে লিটলউডের কথা বলা হয়েছে। তাঁর মন্তব্যও ছিল চিঠিটির সঙ্গে।]

◆◆◆

ডেউসবারিকে গিলবার্ট ওয়াকারের চিঠি

26 February 1913
Madras

To
The Registrar of the University of Madras.

Sir,

I have the honour to draw your attention to the case of S. Ramanujan, a clerk in the Accounts Department of the Madras Port Trust. I have not seen him, but was yesterday shown some of his work in the presence of Sir Francis Spring. He is, I am told, 22 years of age and the character of the work that I saw impressed me as comparable in originality with that of a Mathematics fellow in a Cambridge College; it appears to lack, however, as might be expected in the circumstances the completeness and precision necessary before the universal validity of the results could be accepted. I have not specialised in the branches of pure mathematics at which he has worked, and could not therefore form a reliable estimate of his abilities, which might be of an order to bring him a European reputation. But it was prefectly clear to me that the university would be justified in enabling S. Ramanujan for a few years at least to spend the whole of his time on mathematics without any anxiety as to his livelihood, and I would suggest that they should communicate with Mr. G. H. Hardy, Fellow of Trinity College, Cambridge with whom he is already in correspondence and assure Mr. Hardy of their interest in him.

I have the honour to be
Sir
Your most obedient servant
Gilbert T. Walker
Director General of Observatories

[গবেষণার জন্য রামানুজনকে বিশ্ববিদ্যালয় থেকে বৃত্তি দেবার অনুকূলে এই চিঠি।]

◆◆◆

হার্ডিকে লেখা রামানুজনের দ্বিতীয় চিঠি

27 February 1913
Madras Port Trust Office
Accounts Department

Dear Sir,

I am very much gratified on perusing your letter of the 8th February 1913. I was expecting a reply from you similar to the one which a Mathematics Professor at London wrote asking me to study carefully Bromwhich's Infinite Series and not fall into the pitfalls of divergent series. I have found a friend in you who views my labours sympathetically. This is already some encouragement to me to proceed with my onward course. I find in many a place in your letter rigorous proofs are required and so on and you ask me to communicate the methods of proof. If I had given you my methods of proof I am sure you will follow the London Professor. But as a fact I did not give him any proof but made some assertions as the following under my new theory. I told him that the sum of an infinite number of terms of the series : $1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}$ under my theory. If I tell you this you will at once point out to me the lunatic asylum as my goal. I dilate on this simply to convince you that you will not be able to follow my methods of proof if I indicate the lines on which I proceed in a single letter. You may ask how you can accept results based upon wrong premises. What I tell you is this. Verify the results I give and if they agree with your results, got by treading on the groove in which the present day mathematicians move, you should at least grant that there may be some truths in my fundamental basis. So what I now want at this stage is for eminent professors like you to recognize that there is some worth in me. I am already a half starving man. To preserve my brains I want food and this is now my first consideration. Any sympathetic letter from you will be helpful to me here to get a scholarship either from the University or from the Government.

With respect to the mathematics portion of your letter it is the results that you class under 1st head and which you say are already known or are easily deducible from known theorems which encourage me now to proceed onward. For my results are verified to be true even though I may take my stand upon slender basis. I may now assure myself that my results and my method of proof are as rigid as ether. Suppose I say that ether is rigid to one who does not know the ether hypothesis. He will simply laugh. The results I gave in my letter to you were only examples derived from substitution of particular values in some of the theorems I got. This time I give you some more general than the previous ones but still only particular cases of my theorems.

You may judge me hard that I am silent on the methods of proof. I have to re–iterate that I may be misunderstood if I give in a short compass the lines on which I proceed. It is not on account of my unwillingness on my part but because I fear I shall not be able to explanin everything in a letter. I do not mean that the methods should be buried with me. I shall have them published if my results are recognised by eminent men like you. You ask me to give you the expression I have got for the number of prime numbers within a given number. These are the expressions that I have obtained for the number of primes less than a give [n] number.

....

With kind regards
Yours very truly
S. Ramanujan

[এখানে চিঠিটির প্রথম দিকের অংশ উদ্ধৃত করা হয়েছে। চিঠিটির সঙ্গে গাণিতিক অংশ দেওয়া হয় নি, যা এই চিঠির (10 পাতার) প্রায় সবটা জুড়ে ছিল।]

◆◆◆

সরকারের শিক্ষা বিভাগের মেমো

5 April 1913

Subject .: Grant of a special scholarship of Rs. 75 per mensem for a period of two years to S. Ramanujan a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office, Madras.

Please see the regulations governing research studentships printed on page 3 of G. O. No. 625, Edl., dated 25th November 1909. These regulations apply only to graduates. In the present case the student is only an under-graduate (F. A.) and any scholarship that is given to him should be outside these regulations. The amount and the tenure of the scholarship proposed are the same as those provided in the regulations. There seems to be no objection to sanction the special scholarship recommended by the syndicate. The general provisions of section 3 of the Indian Universities Act, 1904, and section SV of the Act of Incorporation appear to cover this expenditure. A draft order is submitted below for approval. After the issue of the order, the file may perhaps be sent to the Marine Department for perusal.

ORDER :

The Government are pleased to sanction the proposal of the Syndicate to grant S. Ramanujan a special scholarship of Rs. 75 per mensem tenable for a peroid of two years.

[এখানে হাতে লেখা একটি নোট (note) ছিল যাতে ফাইলটি Marine Department -এ পাঠাবার প্রয়োজন নেই বলে মন্তব্য ছিল।]

◆◆◆

ডেউসবারিকে লেখা রামানুজনের চিঠি

To

The Registrar,
University of Madras.
Through
The Chairman, Madras Port Trust.

12 April 1913
Accounts Department
Port Trust Office.

Sir,

I have the honour to acknowledge with thanks the receipt of your letter No. 1631 dated the 9th April 1913 offering me a scholarship of Rs. 75 per mensem tenable for two years. In reply I beg to inform you that I am willing to take up the scholarship from the 1st May and that I shall abide by the conditions detailed in your above letter. The Chairman of the Port Trust will relieve me from my present work on the 1st proximo.

I beg to remain
Sir
Your Obedient Servant,
S. Ramanujan.

[চিঠিতে গবেষক হিসাবে 1913 সালের 1লা মে যোগদানে কথা ছিল এবং রামানুজন এই দিনই গবেষণায় যোগ দেন।]

◆◆◆

হার্ডিকে রামানুজনের চিঠি

17 April 1913
Madras Port Trust
Accounts Department

Dear Sir,

I am in receipt of your letter of the 26th ultimo. I am a little pained to see what you have written at the suggestion of

Mr. Littlewood. I am not in the least apprehensive of my method being utilised by others. On the contrary my method has been in my possession for the last eight yers and I have not found anyone to appreciate the method. As I wrote in my last letter I have found a sympathetic friend in you and I am willing to place unreservedly in your possession what little I have. It was on account of the novelty of the method I have used that I am a little diffident even now to communicate my own way of arriving at the expressions I have already given. But still in this letter I have attempted to give a demonstration which would be acceptable to you all.

You speak of having written to me three long letters. But I have received only two. Your first communication to me and the letter of the 26th ultimo. I am anxious to know what your other communication contained. Very probably my not replying to you to what was contained in the letter not received by me made you write in the strain you have done at the suggestion of Mr. Littlewood. I was wondering why you never wrote anything about my personal question. Very probably the second communication contained something about it. I am glad to inform you that the local University has been pleased to grant me a scholarship of £60 per annum for two years and this was at the instance of Dr. Walker F.R.S. Head of the Meteorological Department in India to whom my thanks are due. The scholarship will help me a great deal for two years.

My knowledge of English being poor I find it difficult to collect my thoughts and put them in a form presentable to you. I have tried this time to give you a proof in connection with the expression I have for the distribution of primes.

....

I am delighted to hear that not only yourself but also other mathematicians at the very fountain head of mathematical knowledge are interesting themselves in my humble work. I request you to convey my thanks not only to your good self but also to Mr. Littlewood, Dr. Barnes, Mr. Berry and others who take an interest in me.

I am
Yours very sincerely
S. Ramanujan

[হার্ডিকে লেখা এই তৃতীয় চিঠিতে রামানুজন তাঁর গাণিতিক কিছু সূত্রের ব্যাখ্যা দেওয়ার চেষ্টা করেছেন। এখানে চিঠির অংশ বিশেষ দেওয়া হল।]

◆◆◆

হার্ডিকে লেখা রামানুজনের চিঠি

22 January 1914
Madras

Dear Sir,

Received your kind letter dated 24th December 1913. I carefully went though your valuable remarks and I have written at the end of this letter some corrections I have made, for your kind consideration.

Now I learn from your letter and Mr. Neville that you are anxious to get me to Cambridge. If you had written to me previously I would have expressed my thoughts plainly to you. In February 1913 when I was in the Port Trust, the Secretary to the Students Advisory Committee of Madras wrote to me that he had been asked by Mr. Mallet of the India Office to see me and therefore I might go to him the next noon. The Chairman of the Port Trust told my superior officer to go with me and answer his questions. Accordingly the next day we went to him and he asked us whether I was prepared to go to England. While I was hesitating to reply him as the question appeared vague to me and I naturally was thinking whether I had to appear for any examination with my very poor educational qualification as I used to see students from here going to England only for appearing for some examination, my superior officer, a very orthodox Brahman having scruples to go to foreign land replied at once that I could not go to England and the matter was dropped.

After that I had no correspondence from you. Then I wrote a reminder to you which, I think, you have not received. Another thing I have to say to you is that all letters written to you, except this one and the remainder, did not contain my language. Those were written by the superior officer mentioned before, though the mathematical results and handwriting were my own. I am writing all these things plain to you so that you may judge properly my knowledge of English and power of expression of thought as they are.

I went to Mr. Neville of your college who very kindly spoke to me and cleared my doubts that I need not care for my expenses, that my English will do, that I am not asked to go to England to appear for any examination and that I can ramain a vegetarian there. He also pointed out to me the benefits I derive in coming in contact with modern mathematicians and modern ways of thinking. Then when I expressed my willingness to go there he said that the best time for me to go there is summer and it will be difficult for me to go in winter.

So I request that you and Mr. Litlewood will be good enough to take the trouble of getting me there within a very few months. I think I may prepare the article with your help after going to England. You may write to me to the Port Trust as usual. I request you to convey my thanks to Mr. Littlewood and beg to hear as soon as possible from you.

Yours very sincerely
S. Ramanujan

[চিঠিটির সঙ্গে অবশ্যই কিছু গাণিতিক ফল ছিল যা দেওয়া হয়নি। এখানে Superior officer -এর নাম না থাকলেও তিনি যে এস. নারায়ণ আয়ার, তা বলার অপেক্ষা রাখেনা। চিঠিতে প্রাথমিকভাবে রামানুজনের ইংল্যান্ড না যাবার কারণ স্পষ্ট।]

◆◆◆

ডেউসবারিকে নেভিলের চিঠি

28 January 1914
Madras

Dear Mr. Dewsbury,

The dicovery of the genius of S. Ramanujan of Madras promises to be the most interesting event of our time in the mathematical world. From the first results which he communicated, the mathematicians of Cambridge at once believed that he had uncommon ability, and the effect of personal acquaintance with the man and conversation as to his methods has been in my own case to replace that belief by certainty. At the same time the importance of securing to Ramanujan a training in the refinements of modern methods and a contact with men who know what range of ideas have been explored and what have not cannot be over estimated.

Unassisted by knowledge of contemporary achievements in Europe, Ramanujan has among other things developed two of the most fruitful and subversive theories which have been studied there during the last ten or fifteen years, theories which still are to be found only in contributions to the various scientific journals and are not admitted to current text books and treatises. Who can say, had his power not been employed in the invention of these tools, what other machinery he might by now have built or what uses unnoticed by the others he might have observed for the processes themselves? Inspiration is not confined to the making of a single discovery, and it is always a loss to science when two men do the same work.

On the other hand, we have learnt in Europe what Ramanujan has not yet discovered, that the more powerful a method may be the more carefully it must be used. It is often thought that mathematical genius includes an instinct for the avoidance of fallacies, but is not true to say more than that genius includes a potential faculty of detecting danger. A trained mathematician is often aware intuitively when special care is necessary, but that this intuition, [to] which no English analyst would trust his reputation, may be developed in a man of genius, the fact that Ramanujan himself has sent to Cambridge a number of demonstrably false results proves conclusively. At present all his results must necessarily be regarded with some suspicion till they have been independently obtained, a state of affairs which must not continue.

I see no reason to doubt that Ramanujan himself will respond fully to the stimulus which contact with Western mathematicians of the highest class will afford him. In that case his name will become one of the greatest in the history of mathematics, and the University and City of Madras will be proud to have assisted in his passage from obscurity to fame.

Yours sincerely.
E. H. Neville

[রামানুজনকে মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় থেকে বৃত্তি দিয়ে ইংল্যান্ডে পাঠাবার জন্য এই গুরুত্বপূর্ণ চিঠি লিখে নেভিল থেমে যান নি, নিজেও এ ব্যাপারে সক্রিয় ভূমিকা নেন ।]

◆◆◆

রামানুজনের জন্য বৃত্তি অনুমোদনের আদেশ

Order-No. 182, Educational 12 February 1914

In the circumstances stated in the Registrar's letter read above, the Government sanction the appropriation of a sum not exceeding Rs.10,000 from the University Vacation Lectures Fund for the grant to S. Ramanujan of a scholarship of £ 250 a year, tenable in England for a period of two years, free passage and a reasonable sum to outfit.

W. Francis,
Ag. Secretary to Government.

[এখানে Ag. Secretary বলতে সম্ভবত Acting Secretary বোঝানো হয়েছে ।]

◆◆◆

নেভিলকে হার্ডির চিঠি

12 February 1914
Trinity College, Cambridge

Dear Neville,

I'm writing in a hurry to catch the mail and warn you to be a little careful. I've been in correspondence with the India office again—I enclose the last letter. In order that Ramanujan should come—and of that I'm as anxious as ever—there must be an absolute certainty of about £250 a year. When I wrote to them before they left me under the impression that that could certainly be found (not from the India office here—there is not and never was any question of that). The sources contemplated were, I presume, Madras University or the central Government of India. According to their then version, Ramanujan's reluctance was the only obstacle. Now this man Mallet seems disposed to sing a different tune. So be very cautious. I think J.E.L. and I between us could contribute £50 for 2 years (don't tell Ramanujan so) —but that's only a very little way.

Of course what Mallet says about 'as it has only been possible etc. ...... ' is bilge – £ 60 a year is heaps for Madras. As regards the College I don't know at all : I'll consult Barnes without delay. He did seem to think it not inconceivable before [.......]

Please keep me well informed as to the progress of the attempts to raise money in India : but don't pledge yourself to anything uncertain.

Kind regards to Mrs. Neville.

Ever yours
G. H. Hardy

[চিঠিতে রামানুজনকে ইংল্যান্ডে নিয়ে আসার জন্য হার্ডির সব চিন্তা ভাবনা-চেষ্টার কথা সুন্দর ভাবে এই চিঠিতে প্রকাশ পেয়েছে। রামানুজনের জন্য হার্ডির আন্তরিকতা এবং মমত্ববোধ চিঠিতে প্রস্ফুটিত।]

◆◆◆

মা-কে লেখা রামানুজনের চিঠি

11 September 1914
Trinity College

Salutations to the great Ramanuja! Ramanujan makes his countless prostrations to his mother and writes. Please write about your welfare. The letters you write reach me regularly. The three letters written on August 4, 10 and 11 reached me. I could not write letters for two weeks. You will henceforth be getteing letters every week. There is no war in this country. War is going on only in the neighbouring country. That is to say, war is waged in a country that is as far as Rangoon is away from the city (Madrs). Lakhs of persons have come here from our country to join the forces. Seven hundred Rajas have come here from our country to wage war. Ultimate victory will come only to the kind of this country. You need not send any provisions. Ramachandra Rao's relative Ananda Rao, a youngster, has come to this country for study. He has not yet reached this place. He will come in October. Mr. Seshu Aiyar has told him to take with him numerous articles for being given to me. He and another youngster Sankar Rao have arrived in England.

When they reached the town of Port Said, the war commenced. Unknowingly they had sailed in the enemy ship. Their intention was to travel in an Austrian ship, get down at Austria and reach here by train. But while nearing the Island of Crete on the way to Austria after leaving Port Said, the crew of the English ship stopped as it carried no guns. If the men of the ship had also fired, the ship would have been shot and sunk. The ship was captured and all the persons in the ship were taken prisoners and carried to Alexandria and the ship was seized. The people coming from our country and the Englishmen were put in another ship and sent here. These two youngsters reached after escaping this danger.

No war like this has raged before. The present war affects crores of people. It is not one or two crores. Germans set fire to many a city, slaughter and throw away all the people, the children, the women and the old. The small country Belgium is almost destroyed. Each town has buildings fifty to hundred times more valuable than those in Madras city.

In many towns, the people of the towns themselves blow off the supports of the bridges over rivers, leave them hanging in mid air, spread gunpowder all over the streets, lay mines and cover them up and remain ready to flee. When enemies come, the bridges fall and half of them are carried off by the current of the river and when the rest enter the city, the dwellers themselves burn the city and flee. When streets are ablaze, the enemies try to escape but the iron wires get round their legs and they perish, unable to run away.

War is waging at many places. Each place has an extent of 200 miles. This is on the land. Many ships are sunk by battles raging in mid oceans. These are of two kinds. One is to fire directly at a ship: the other is to go under water, knock at the enemy ship and sink it. Not only this. They fly in aeroplanes at great heights, bomb the cities and ruin them. As soon as enemy planes are sighted in the sky, the planes resting on the ground take off and fly at great speeds and dash against them resulting in destruction and death.

All that you sent got broken but reached me without falling off because of the supporting cloth. I get everything here. I get certain provisios from the city (Madras). You need not send anything.

Yours,
Ramanujan

[মাকে আশ্বস্ত করার জন্য রামানুজনের লেখা এ চিঠিতে যুদ্ধ সম্বন্ধে এবং কিছু কিছু ঘটনা সম্বন্ধে অনেক তথ্য জানা গেল।]

◆◆◆

বাবাকে লেখা রামানুজনের চিঠি

17 November, 1914
Trinity College

Salutations to the great Ramanuja! Ramanujan makes his countless prostrations to his father and writes. Well and wish to hear the same from you. I got your letter. I have also received the letter written earlier by Tirunarayanan. I have all the pickles. I get tamarind etc. from Madras. You need not send any thing. Except the kuzhuvidam [dried up precooked foodstuff made of flour] which you are sending now, do not send any other thing. My college was closed last week. It is to open in the middle of January. I am getting on well. Keep the house in such a way that it is attractive to look at. Do not allow the gutter to run as usual. Pave the place with bricks and keep it well. I am getting on well. The students who have come from our place have joined the neighbouring college.

Yours,
Ramanujan

[মা ও বাবাকে লেখা রামানুজনের উপরের চিঠি দু'টি ছিল তামিল ভাষায় লেখা। উপরের ভাষান্তর পি কে শ্রীনিবাসনের।]

◆◆◆

ডেউসবারিকে লেখা বার্নেসের চিঠি

8 November, 1915
Trinity College, Cambridge

Dear Sir,

The work and progress of Mr. S. Ramanujan is excellent. He is entirely justifying the hopes entertained when he came here. There can be no doubt at all that his scholarship should be extended until, as I confidently expect, he is elected to a Fellowship at the College. Such an Election I should expect in Oct. 1917.

Yours faithfully,
E.W. Barnes,
Fellow and Tutor of Trintity College.

[মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয়ের রেজিস্ট্রারকে লেখা ই ডব্লু বার্নেসের এ চিঠি শুধু রামানুজনের প্রগতির প্রতিবেদন নয়, বৃত্তির সময় বৃদ্ধিরও সুপারিশ।]

◆◆◆

হার্ডিকে লেখা রামানুজনের চিঠি

Matlock House

Dear Mr Hardy,

My words are not adequate to express my thanks to you. I did not even dream of the possibility of my election. When I opened your telegram I read thrice Fellow Philosophical Society instead of Royal Society – I came to know only very recently of my election to Cambridge Philosophical Society – and I was very much puzzled why you sent a telegram from Piccadilly for that. It is only after some time that I read you telegram correctly.

Please convey my heartfelt thanks to Major MacMahon and Mr Littlewood. I am sorry I didn't write to them as I did not know their addresses.

Ever Yours
S. Ramanujan

[চিঠিটি সম্ভবত 1918 সালের 1লা মার্চ শুক্রবার বা তার আগের দিন লেখা। উত্তেজনায় এফ আর এস হবার সংবাদকে উপলব্ধি করতে রামানুজনের কিছুটা সময় যে নেয়, তা চিঠি থেকে বোঝা যায়।]

◆◆◆

হার্ডিকে লেখা রামানুজনের চিঠি

Fitzroy House
16 Fitzroy Square, London
Friday

Dear Mr. Hardy,

My heartfelt thanks for your kind telegram. After you succeded in getting me elected by the Roayl Society my election at Trininty probably became very much less difficult this year.

My tooth extraction was to be done this morning. But the dentist was not able to come as he was indisposed. I have not been very well since you saw me and my temperature has been as irregular and high as [it] was at Matlock. Dr. Bolton thinks that my feverish attacks and my rheumatic pain are both due to my teeth. His idea explains very well the rheumatic pain and no other doctor gave any cause for the pain. But I can't see any connection between the teeth and the feverish attacks which reduce my body and which existed long before anything was wrong in my teeth. I shall just remove one or two teeth for the present and I do not want to trouble with the other ones now.

Yours ever,
S. Ramanujan

[চিঠিটি সম্ভবত 1918 সালের 11ই অক্টোবরে লেখা, ট্রিনিটি কলেজের ফেলো হিসাবে নির্বাচনের পরের দিন। মনে রাখা দরকার যত সহজে এ নির্বাচন হয়েছে বলে রামানুজনের ধারণা ছিল, তা যে হয় নি সেটা বইটির প্রথম ভাগেই জানা গেছে।]

◆◆◆

ডেউসবারিকে রামানুজনের চিঠি

Colinette House, Putney

To the Registrar to the University of Madras

Sir,

I beg to acknowledge the receipt of your letter of 9th December 1918, and gratefully accept the very generous help which the University offers me.

I feel, however, that after my return to India, which I expect to happen as soon as arrangements can be made, the total amount of money to which I shall be entitled will be much more than I shall require. I should hope that, after my expenses in England have been paid, £50 a year will be paid to my parents and the surplus, after my necessary expenses are met, should be used for some educational purpose, such in particular – as the reducion of school-fees for poor boys and orphans and provision of books in schools. No doubt it will be possible to make an arrangement about this after my return.

I feel very sorry that, as I have not been well, I have not been able to do so much mathematics during the last two years as before. I hope that I shall soon be able to do more and will certainly do my best to deserve the help that has been given me.

I beg to remain, Sir,
Your most obedient servant
S. Ramanujan

[চিঠিতে রামানুজনের সহানুভবতা ও পরোপকারী চরিত্রের দিক সুন্দরভাবে ফুটে উঠেছে। চিঠিটি 1919 সালের 11ই জানুয়ারী লেখা।]

◆◆◆

যে সব চিঠি ও নথিপত্র এখানে সংকলিত হয়েছে তার প্রতিটিই বার্ন্টি ও র‍্যানকিনের লেখা 'Ramanujan : Letters and Commentary' বইটির সৌজন্যে

তথ্যসূত্র

1. 'The Man Who Knew Infinity : A Life of the Genius Ramanujan'; Robert Kanigel ; Rupa & Co, Calcutta-73 (1992).
2. 'Srinivasa Ramanujan' ; Suresh Ram ; National Book Trust, India (1989).
3. 'Srinivasa Ramanujan : A Mathematical Genius' ; K. Srinivasa Rao ; East-West Books (Madras) Pvt. Ltd. (1998).
4. 'Collected Papers by Srinivasa Ramanujan' ; edited by G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson, Cambridge University Press (1927).
5. 'Ramanujan : The Man and the Mathematician' ; S. R. Ranganathan; Asia Publishing House (1967).
6. 'Ramanujan : Letters and Commentary' ; Bruce C. Berndt and Robert A. Rankin ; Affiliated East West Press Pvt. Ltd (Spl. Indian Edition 1997).
7. 'Ramanujan : Twelve lectures on subjects suggested by his life and work' ; G. H. Hardy ; Chelsea Publishing Company, New York (1940).
8. 'Ramanujan Notebooks' Parts I (1985), II (1989), III (1991), IV(1994), V (1997) ; Bruce C. Berndt ; Springer-Verlag, N.Y.
9. 'Ramanujan Revisited' ; edited by George E. Andrews, Richard A. Askey, Bruce C. Berndt, K. G. Ramanathan, Robert A. Rankin ; Academic Press Inc (1988).
10. 'Notebooks of Srinivasa Ramanujan' (facsimile edition) 2 vols. ; Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1957)
11. 'The Lost Notebook and Other Unpublished Papers of S.Ramanujan' ; Narosa Publishing House, New Delhi (1988).
12. 'Ramanujan Centenary Year Souvenir' ; Proceedings of 22nd annual conference (3-6 Dec, 1987), AMTI.
13. 'Ramanujan's Birth Centenary Commemorating Volume of Bulletin of the Tripura Mathematical Society' ; Volume VIII. (1987-88).

14. 'The Early and Last days of Srinivasa Ramanujan' ; C. A. Reddi ; The Mathematics Teacher Vol 34 (1998) (P. 1-18) ; AMTI (Association of Mathematics Teachers of India).

15. 'An Introduction to Creativity of Ramanujan' ; T. Dharmarajan. P. K. Srinivisan ; AMTI (1987).

16. 'The Indian Mathematician Ramanujan' ; G. H. Hardy [A lecture delivered at the Harvard Tercentenary Conference of Arts & Science, August 31, 1936]. 1937. 2 America Mathematical Monthly, 44 (P. 137-155).

17. 'A Mathemetician's Apology' ; G. H. Hardy (with a foreword by C. P. Snow) : Cambridge University Press, Canto edition (1992).

18. 'Centenary Celebration Souvenir : Kumbakonam Town High School' (1964).

19. 'An Introduction to the Theory of Numbers' (Third Edition) ; G. H. Hardy and E. M. Wright ; Oxford Clarendon Press (1954).

20. 'A Course of Pure Mathematics' ; G. H. Hardy ; (Tenth Edition), Universal Book Stall, N. Delhi ; First Indian Reprint (1989).

21. 'A Mathematician's Miscellany' ; J.E. Littlewood ; London Methuen & Co. (1953).

22. 'The Great Mathematicians' : H. W. Turnbull ; Methuen & Co. Ltd ; Fourth ed (1951).

23. 'Srinivasa Ramanujan" ; James R. Newman ; The World of Mathematics Vol I (P. 359-368) ; Tempus. USA (1988).

24. 'Review of Ramanujan : Letters & Commentary, by Bruce C. Berndt & Robert A. Rankin' ; Krishnaswami Alladi ; (P. 708-713). The American Mathematical Monthly, Vol. 103 No : 8 (Oct 96).

25. 'Makers of Mathematics' : Alfred Hooper ; Vintage Books ; New York (1948).

26. 'Obituary Notices : Srinivasa Ramanujan' . G. H. Hardy : Proceedings of the London Mathematical Society (2), 19 (1921).

27. 'Mr. Ramanujan's Mathematical Works in England' ; G. H. Hardy, Journal of Indian Mathematical Society (1917). 9, (P 30-45).

28. 'Srinivasa Ramanujan' ; Bruce C. Berndt. The American Scholar 58 (1989). (P 234-244).

29. 'Ramanujan's Quarterly Reports' ; B. C. Berndt. : Bulletin of London Mathematical Society 16 (1984) ; (P 449-489).

30. 'Ramanujan' ; L. J. Mordell ; Nature 148, (November 1941). (P 642-647).

31. 'Srinvisa Ramanujan' ; Neville, Nature 149, no : 3776 (March 1942), (P 292-295).

32. 'Mathematical Recreation and Essays' ; W.W. Rouse Ball. Macmillan & Co. Ltd., London (1949).

33. 'History of Mathematics (Vol. I & Vol. II)' ; D.E. Smith ; Dover Publication, INC. N.Y. (1958).

34. 'অনন্য প্রতিভা রামানুজন' ; রবীন বন্দ্যোপাধ্যায় ; শ্রীভূমি পাবলিশিং কোম্পানী, কলকাতা (1981).

35. 'তিন বিজ্ঞানী' ; যতীশচরণ চৌধুরী ; মনীষা গ্রন্থালয়, কলকাতা (1983).

36. 'কালের পথিক শ্রীনিবাস রামানুজন' ; সাধন দাশগুপ্ত ; বঙ্গীয় বিজ্ঞান পরিষদ, কলকাতা (1988).

37. 'গণিতচর্চা, বিশেষ সংখ্যা [রামানুজন ও বিভূতিভূষণ দত্ত]', অষ্টম বর্ষ, প্রথম-দ্বিতীয় সংখ্যা (মার্চ-জুন, 1988).

38. 'গাণিতিক পরিভাষা' (প্রথম খণ্ড) ; মণীন্দ্রচন্দ্র চাকী (প্রধান সম্পাদক) ও অন্যান্য ; পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ (1989).

39. 'রামানুজন ও গণিতভাবনা' ; সত্যবাচী সর, জ্ঞান-বিচিত্রা, বিশ বর্ষ, অষ্টম সংখ্যা, ফেব্রুয়ারি, (1996), (P. 3-12).

40. 'রামানুজনের সৃষ্টির সান্নিধ্যে' ; সত্যবাচী সর, জ্ঞান-বিজ্ঞান, বঙ্গীয় বিজ্ঞান পরিষদ (To appear).

Madras

5th Aug 1913.

From S. Ramanujan, Scholarshipholder in Mathematics.

To The Board of Studies in Mathematics

Through: The Registrar, University of Madras.

Gentlemen,

With reference to para. 2 of the University Registrar's letter no. 1631 dated the 9th April 1913, I beg to submit herewith my quarterly Progress Report for the quarter ended the 31st July, 1913..........

The investigations I have made on the basis of this theorem are not all contained in the attached paper. There is ample scope for new and interesting results out of this theorem. This paper may be considered the first instalment of the results I have got out of the theorem. Other new results based on the theorem I shall communicate in my later reports.

I beg to submit this, my maiden attempt, and I humbly request that the Members of the Board will make allowance for any defect which they may notice to my want of usual training which is now undergone by College Students and view sympathetically my humble effort in the attached paper.

I beg to remain,
Gentlemen,
Your obedient servant,
S. Ramanujan.

| প্রথম ত্রৈমাসিক প্রগতি প্রতিবেদন পেশ করার সময়কার চিঠি |